

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Тольяттинский государственный университет  
Кафедра «Материаловедение и механика материалов»

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ  
И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ**

Учебное пособие

УДК 539.3/.6

ББК 34.623

Г 12

Г 12 Гаврилова Т.Ф., Котова И.В., Тимофеев С.А. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии: Методическое пособие. Тольятти: ТГУ, 2005. 41 с.

В пособии рассматриваются основные виды расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций стержневого типа в условиях растяжения-сжатия. Выделены два основных типа задач с точки зрения действующих систем сил: статически определимые и статически-неопределимые.

Особое внимание уделено методу раскрытия статической неопределимости – методу сил. Приведено физическое обоснование метода, математическая модель и четкий алгоритм решения задач с его применением, подкрепленный конкретными примерами.

В приложении приведены варианты заданий по данной теме для студентов очной, очно-заочной и заочной формы обучения.

УДК 539.3/.6

ББК 34.623

© Тольяттинский государственный университет, 2005

# Содержание

1. Что надо знать о деформации растяжение–сжатие .....	4
2. Основные виды расчетов при растяжении-сжатии .....	6
3. Расчет на прочность и жесткость при воздействии статически определимой системы сил .....	8
4. Оценка прочности элементов конструкции при воздействии статически неопределимой системы сил .....	13
Заключение .....	31
Библиографический список .....	32
Приложения .....	33

# 1. Что надо знать о деформации растяжение–сжатие

Растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, когда в ответ на внешнее воздействие в поперечных сечениях элемента конструкции возникает один внутренний силовой фактор: внутренняя продольная сила  $N$ .

В таблице 1 приведены основные понятия и методы, необходимые для решения задач по данной теме.

Таблица 1

Основные понятия, формулы	Физический смысл, определение
Внутренняя продольная сила – $N$ , (Н)	Внутренний силовой фактор, возникающий под воздействием внешних сил при растяжении-сжатии.
Нормальное напряжение – $\sigma$ (Па); $\sigma = \frac{N}{A}$	Напряжение, возникающее в точках поперечных сечений элемента конструкции, вектор которого направлен $\perp$ плоскости сечения и одинаковый по величине во всех точках сечения.
Допускаемое напряжение – $[\sigma]$ (МПа) $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ – для пластичных материалов; $[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$ – для хрупких материалов.	Напряжение в коэффициент запаса раз ( $n_T$ или $n_B$ ) меньше предельного ( $\sigma_T$ – предела текучести или $\sigma_B$ – предела прочности).
Условие прочности – $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$	Условие ограничения величины напряжения в опасном сечении.
Абсолютная деформация – $\Delta l$ (м) $\Delta l = l_1 - l_0$ ; $\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EA}$ ; $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$ для $N = \text{const}$	Разница между длинами элемента конструкции до $l_0$ и после нагружения $l_1$ .
Относительная деформация – $\varepsilon$ (безразмерная или %) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$	Отношение абсолютной деформации элемента конструкции к его первоначальной длине.
Перемещение – $\delta$ (м) $\delta = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$	Изменение положение поперечного сечения по направлению продольной оси элемента конструкции в результате его деформации.
Закон Гука – $\sigma = E \cdot \varepsilon$	Закон упругого деформирования, устанавливающий прямую пропорциональную зависимость между напряжением и относительной деформацией через модуль Юнга – $E$ , который характеризует жесткость материала.
Жесткость сечения – $E \cdot A$	Определяется размером площади сечения $A$ и жесткостью материала $E$ .

Основные методы расчета	Назначение метода
Метод сечений: $N = \sum_i F_{iz}^{отсеч.части}$	Используется для определения внутренней продольной силы в сечениях элемента конструкции
Метод Мора (интеграл Мора): $\delta = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_k(F) \cdot N_{1k}}{(EA)_k} dz,$ где $N_k(F)$ – функция продольной силы на k-том участке под действием обобщенной силы F; $N_{1k}$ – функция продольной силы от единичной нагрузки, приложенной к искомой точке сечения системы, разгруженной от внешних сил.	Используется для определения перемещений точек сечений упругой системы
Метод расчета на прочность по допускаемому напряжению	Используется для решения ряда задач из условия прочности: $\sigma_{max} \leq [\sigma].$
Метод сравнения перемещений	Служит для раскрытия статической неопределимости, т.е. определения величин избыточных неизвестных сил в системе. Основан на совместном решении статической, геометрической и физической сторон задачи.
Метод сил	Служит для раскрытия статической неопределимости. Основан на замене лишних связей их неизвестными реактивными силами и решении системы уравнений, определяющих перемещения в направлении этих связей.

## 2. Основные виды расчетов при растяжении-сжатии

При растяжении-сжатии в основном проводится два вида расчетов:

- расчет элементов конструкции на прочность;
- расчет элементов конструкции жесткость.

Наиболее распространенным типом расчета на прочность является проверочный расчет по допускаемому напряжению, в основе которого лежит условие в виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

где левая часть – расчетная  $\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max}$ , а правая, допускаемое напряжение, полученное на

основе эксперимента. Например, для пластичного материала:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести;

$n_T$  – коэффициент запаса по текучести.

Из условия прочности могут быть решены следующие задачи:

1. Задача об определении допускаемого размера поперечного сечения при известной системе внешних сил и используемой марке материала:

$$[A] = \frac{N}{[\sigma]}.$$

2. Задача об определении величины допускаемой нагрузки при известных размерах и форме поперечного сечения, и используемой марке материала:

$$[N(F)] = [\sigma] * A.$$

В результате, основываясь на математической зависимости продольной силы  $N$  от величины внешней силы  $F$ , получают допускаемую нагрузку  $[F]$ ;

3. Задача об определении максимальной величины напряжения при известной системе внешних сил, форме и размерах поперечного сечения и последующего сравнения с величиной допускаемого напряжения, т.е. проверкой возможности использования предлагаемой в задаче марки материала.

Алгоритм расчета на прочность:

1. Определение положения опасного сечения;
  - 1.1. Построение эпюры продольной силы  $N(F)$ ;
  - 1.2. Определение максимального значения напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max};$$

2. Решение условия прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ , соответственно поставленной задаче.

Расчет на жесткость обычно сводится к определению максимального перемещения поперечных сечений стержня с последующим сравнением этого значения с величиной допускаемого перемещения. Так как последнее связано с условиями эксплуатации элемента конструкции, то чаще всего не задано в условии задачи. Условие жесткости можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – допускаемая величина перемещения;

$\delta_{\max}$  – расчетная величина обычно определяется по эпюре перемещений, т. е. выбирается максимальная из всех значений перемещений характерных сечений стержня. Перемещение характерного сечения можно определить как накопленную алгебраическую сумму абсолютных изменений длин участков, заключенных между принятым началом координат и данным сечением:

$$\delta_k = \sum_{i=1}^k \Delta l_i = \sum_{i=1}^k \int_{l_i} \frac{N_i}{(EA)_i} dz_i \quad \text{или} \quad \delta_k = \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_i \cdot l_i}{E} \quad \text{при } N_i = \text{const} \text{ и } (EA)_i = \text{const}$$

где  $k$  – номер характерного сечения;

$i$  – номер участка, расположенного между началом координат и  $k$ -тым характерным сечением.

В некоторых случаях при определении перемещений целесообразно использовать метод Мора.

Алгоритм метода Мора:

1. Определить закон внутренней продольной силы на рабочих участках или элементах конструкции, возникающей под действием системы внешних сил (Это можно сделать построением эпюр продольной силы  $N_k(F)$ );

2. Разгрузить конструкцию (снять внешние силы);

3. Приложить к точке сечения, перемещение которого интересует, единичную безразмерную силу в направлении искомого перемещения;

4. Определить закон внутренней продольной силы на рабочих участках или элементах конструкции, возникающей под действием единичной силы (это можно сделать построением эпюр продольной силы  $N_{k1}$ );

5. Определить численное значение перемещения, записав интеграл Мора:

$$\delta = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_k(F) \cdot N_{k1} dz}{(EA)_k}.$$

Количество интегралов в сумме определяется количеством рабочих участков или элементов, на которые разделяется конструкция. В пределах каждого указанного участка  $N_k(F)$ ,  $N_{k1}$  и  $(EA)_k$  не должны менять своего функционального характера.

Обычно при решении задачи о прочности и жесткости мы имеем закон задания внешних сил, действующих на элемент конструкции и условия его закрепления на плоскости или в пространстве. Т.к. опорные реакции включаются в число внешних сил, то первоначально решается задача их определения. С позиции решения этой задачи все системы сил можно разделить на два класса:

1. Статически определимые, когда неизвестные реактивные силы могут быть найдены с помощью аппарата статики;

2. Статически неопределимые, когда число неизвестных реактивных сил превышает количество уравнений статического равновесия для данного типа системы сил.

Рассмотрим примеры расчета элементов конструкций при воздействии указанных типов систем сил.

### 3. Расчет на прочность и жесткость при воздействии статически определимой системы сил

Рассмотрим данный вопрос на примере решения конкретной задачи.

#### Задача №1.

Стержневой элемент конструкции переменного поперечного сечения нагружен осевыми нагрузками (рис. 3.1, а). Материал, из которого изготовлен стержень, Ст.3 имеет следующие механические характеристики:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T=240$  МПа;  $n_T=1,5$ . Требуется проверить прочность, а также определить максимальное перемещение поперечных сечений стержня (рис.3.1, а).

#### Решение.

Анализ системы действующих сил показывает, что она относится к статически определимой, т.к. в заделке возникает одна реактивная сила  $R$ . Для данного типа системы сил можно составить одно уравнение статического равновесия  $\sum_i F_{iz} = 0$ . Согласно алгоритму

прочностного расчета для определения положения опасного сечения:

1. Построим эпюру продольных сил, используя метод сечений (рис.3.1, б). При этом реакцию  $R$  можно заранее не определять, если при построении эпюры двигаться в одном направлении: от свободного конца к заделке. Её величина определится на графике в сечении заделки  $R=25$  кН;

2. Определим напряжения в характерных сечениях стержня и построим эпюру напряжений (рис.3.1, в). Для этого пронумеруем характерные сечения (на рис 3.1, а) от 0 до 5, начиная с заделки и, таким образом, разбив весь стержень на участки: 0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5. В пределах каждого участка функция изменения напряжения по длине имеет неизменный характер. Вычислим напряжения по участкам:

$$\sigma_{0-1} = \frac{N_{0-1}}{A_{0-1}} = \frac{-25 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1-2} = \frac{N_{1-2}}{A_{1-2}} = \frac{5 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2-3} = \frac{N_{2-3}}{A_{2-3}} = \frac{5 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3-4} = \frac{N_{3-4}}{A_{3-4}} = \frac{30 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{4-5} = \frac{N_{4-5}}{A_{4-5}} = \frac{30 - 10z}{1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \Big|_0^{1, \text{ м}};$$

$$\sigma_{4-5} \Big|_{z=0} = 200 \text{ МПа}, \quad \sigma_{4-5} \Big|_{z=1, \text{ м}} = 133,3 \text{ МПа}.$$

По полученным данным построим эпюру напряжений (рис. 3.1, в).

3. Применим условие прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . Из приведенных расчетов видно, что наиболее нагруженное, опасное сечение «4» испытывает напряжение  $\sigma_{\max}=200$  МПа, что превосходит  $[\sigma]=160$  МПа, т.е. условие прочности по допускаемому напряжению не выполняется. Однако материал стержня на всех участках упруго деформируется, коэффициент запаса по текучести  $n_T$  кроме сечения «4» выше принятого в задаче. Если в опасном сечении коэффициент запаса

$$n_{T4} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240 \text{ МПа}}{200 \text{ МПа}} = 1,2, \text{ то в наименее нагруженном сечении с } \sigma=20 \text{ МПа}$$

$$n_{T1} = \frac{240 \text{ МПа}}{20 \text{ МПа}} = 12. \text{ На основании полученных результатов расчета можно сделать}$$

следующие выводы о прочности: *при данных условиях максимальное напряжение, возникающее в стержне, превышает допустимое значение, однако, находится в пределах закона Гука.*

*Коэффициент запаса по текучести изменяется в диапазоне от 1,2 до 12, что указывает на нерациональность конструкции.*

Для определения максимального перемещения поперечных сечений построим эпюру перемещений, приняв начало координат в заделке, т.е. в нулевом сечении. Сначала рассчитаем перемещение каждого из указанных характерных сечений относительно нулевого как накопленную алгебраическую сумму абсолютных изменений длин участков предшествующих каждому характерному сечению.

$$\delta_{1-0} = \Delta l_{1-0} = \frac{\sigma_{1-0} \cdot l_{1-0}}{E} = \frac{-100 \text{ МПа} \cdot 0,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -25 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_{2-0} = \delta_{1-0} + \Delta l_{2-1} = \delta_{1-0} + \frac{\sigma_{2-1} \cdot l_{2-1}}{E} = -25 \cdot 10^{-5} \text{ м} + \frac{20 \text{ МПа} \cdot 0,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -20 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

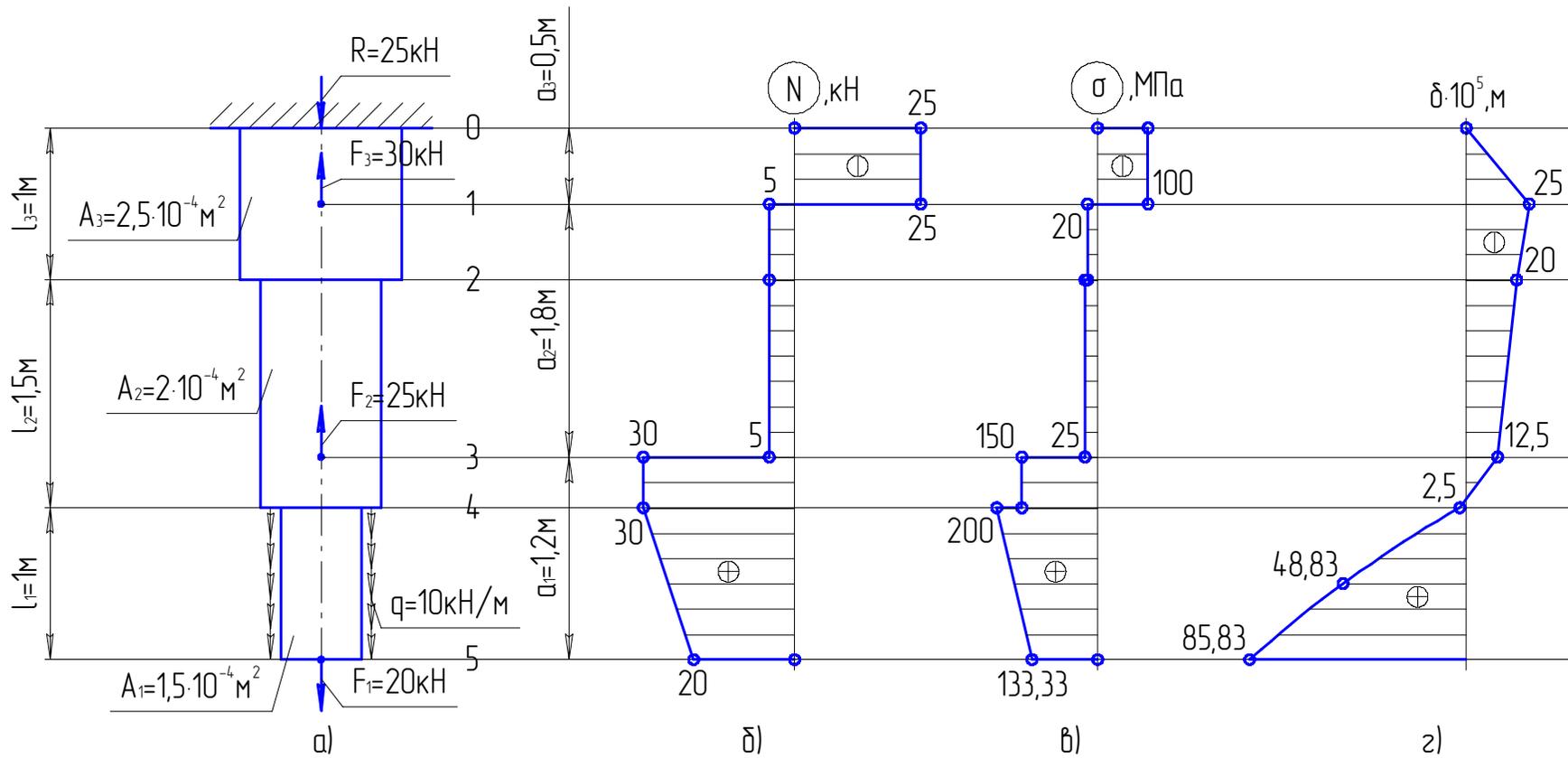


Рис. 3.1 Расчетная схема и эпюры N, σ, δ

$$\delta_{3-0} = \delta_{2-1} + \Delta l_{3-2} = \delta_{2-1} + \frac{\sigma_{3-2} \cdot l_{3-2}}{E} = -20 \cdot 10^{-5} + \frac{25 \text{ МПа} \cdot 0,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -12,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\delta_{4-0} = \delta_{3-2} + \Delta l_{4-3} = \delta_{3-2} + \frac{\sigma_{4-3} \cdot l_{4-3}}{E} = -12,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} + \frac{150 \text{ МПа} \cdot 0,2 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\delta_{5-0} = \delta_{4-0} + \Delta l_{5-4} = \delta_{4-0} + \int_0^{1 \text{ м}} \frac{(30 - 10 \cdot z) dz}{EA_{5-4}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} + \frac{30 \cdot z - 5 \cdot z^2}{EA_{5-4}} \Big|_0^{1 \text{ м}};$$

$$\delta_{5-0} \Big|_{z=0} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad \delta_{5-0} \Big|_{z=0,5 \text{ м}} = 48,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad \delta_{5-0} \Big|_{z=1 \text{ м}} = 85,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Следует обратить внимание на параболический характер зависимости перемещения по длине участка 5-4. По полученным результатам построим эпюру перемещений (рис. 3.1, в). Знак «-» на графике указывает на направление перемещения к заделке, знак «+» – от заделки. Условие жесткости можно записать в виде:

$$\delta_{\max} = 85,83 \cdot 10^{-5} \text{ м} \leq [\delta],$$

где  $[\delta]$  – допускаемая величина перемещения.

В следующем примере рассмотрим задачу определения перемещений с использованием интеграла Мора.

### Задача №2.

Горизонтальная балка ОВ с поперечным сечением большой жесткости крепится на плоскости с помощью шарнирно неподвижной опоры «О» и податливого стержня ВD, нагружена силой  $F=40 \text{ кН}$ . Требуется определить вертикальное перемещение т. «С», если  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $A=2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

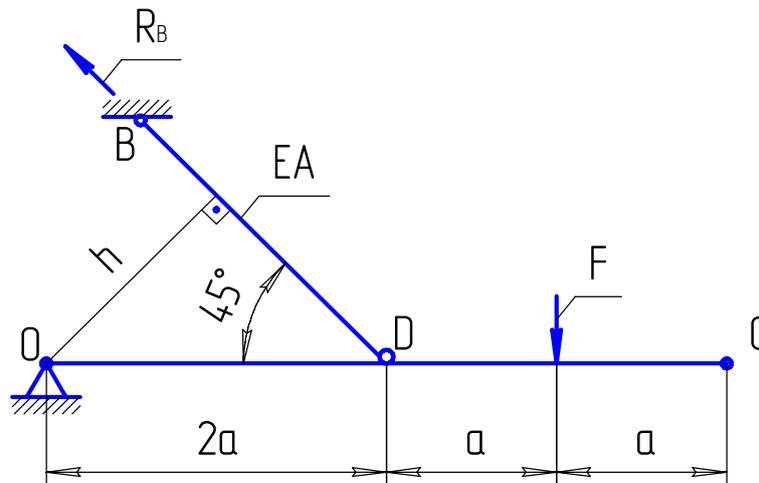


Рис. 3.2. а. Исходная система

### Решение.

Перемещение т. «С» произойдет за счет растяжения стержня ВD под воздействием силы F. Для определения величины вертикального перемещения точки «С» применим метод Мора, для чего:

1. Определим внутреннюю продольную силу  $N_{BD}$ , возникающую в стержне ВD через реакцию в точке крепления «В». Для этого составим уравнение статического равновесия, в качестве которого лучше взять  $\sum_i M_O(F_i) = 0$ :

$$R_B \cdot h - F \cdot 3 \cdot a = 0,$$

откуда  $R_B = 2,12 F$ ,  $N_{BD} = R_B = 2,12 F$  (основание: метод сечений).

2. Разгрузим систему от внешней силы  $F$  и в точку «С» поместим вертикальную безразмерную силу равную единице. Назовем эту систему вспомогательной (рис.3.2, б)

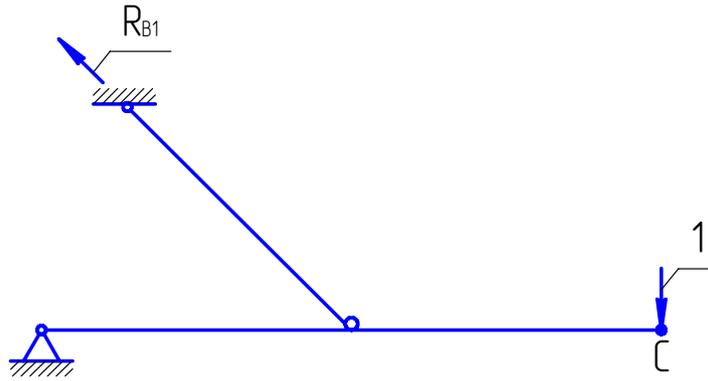


Рис. 3.2, б. Вспомогательная система

3. Определим вновь внутреннюю продольную силу в стержне «BD», возникающую теперь от единичной силы, используя также уравнение статического равновесия  $\sum_i M_O(F_i) = 0$ :

$$R_{B1} \cdot h - 1 \cdot 4 \cdot a = 0,$$

откуда  $R_{B1} = 2,828$ ,  $N_{BD1} = R_{B1} = 2,828$ .

4. Запишем выражение для вертикального перемещения т. «С» через интеграл Мора:

$$\delta_C = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_k(F) \cdot N_{k1}}{(EA)_k} dz_k,$$

т.к. количество рабочих элементов равно единице (стержень «BD»), то

$$\begin{aligned} \delta_C &= \int_0^{1,414} \frac{N_{BD}(F) \cdot N_{BD1}}{EA} dz = \int_0^{1,414} \frac{2,12 \cdot F \cdot 2,828 dz}{EA} = \frac{8,477 \cdot F}{EA} = \\ &= \frac{8,477 \cdot 40 \text{ Кн}}{2 \cdot 10^8 \text{ Кн/м}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 8,477 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,477 \text{ мм}. \end{aligned}$$

## 4. Оценка прочности элементов конструкции при воздействии статически неопределимой системы сил

Если на элемент конструкции действует статически неопределимая система сил, то задаче оценки прочности предшествует задача определения значений лишних неизвестных сил, которую называют раскрытием статической неопределимости

**Лишними силами** обычно называют реакции лишних связей, которые добавляют к необходимым связям, обеспечивающим геометрическую и кинематическую неизменяемость конструкции. Часто эта мера используется с целью обеспечения большей несущей способности конструкции. Для раскрытия статической неопределимости применяют либо метод сравнения перемещений, алгоритм которого подробно описан на примерах конструкций, работающих при растяжении-сжатии, во всех общепринятых учебниках, либо метод сил, применение которого чаще всего описано на примерах изгиба.

В данном пособии предлагается рассмотреть применение метода сил, часто имеющего преимущества по сравнению с методом сравнения перемещений по простоте решения.

Рассмотрим алгоритм метода сил на примере стержневой конструкции  $n$ -раз статически неопределимой. Пусть дана горизонтальная балка большой жесткости, которая крепится на плоскости с помощью шарнирно-неподвижной опоры и  $(n+1)$  податливых стержней, нагруженная вертикальной силой  $F$  (рис. 4.1, а). Т.к. шарнирно-неподвижная опора дает две связи, то степень статической неопределимости, определяемая как разность между количеством связей и количеством уравнений статического равновесия для данной системы сил, будет:

$$S=2+(n+1)-3=n.$$

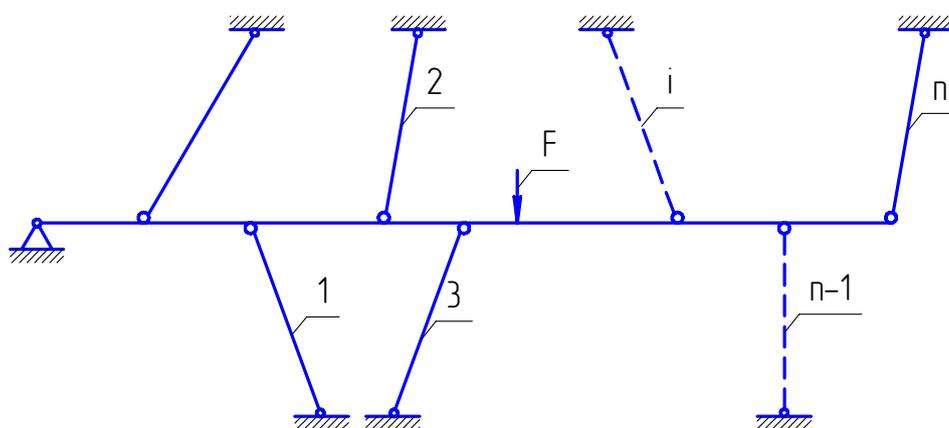


Рис. 4.1, а. Исходная система

Алгоритм метода сил.

1. Образование основной системы (О.С.) (рис. 4.1, б) из исходной путем отбрасывания лишних связей и факторов внешнего воздействия.

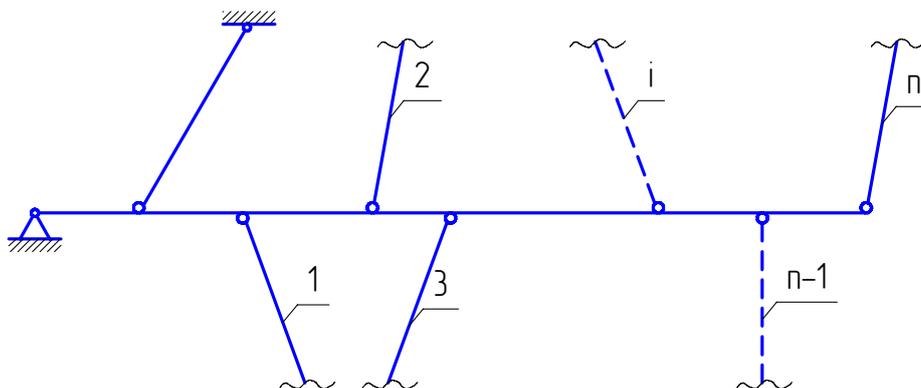


Рис. 4.1, б. Основная система

2. Образование эквивалентной системы (Э.С.) (рис. 4.1, в) из основной путем замены отброшенных связей их неизвестными реакциями и приложением факторов внешнего воздействия.

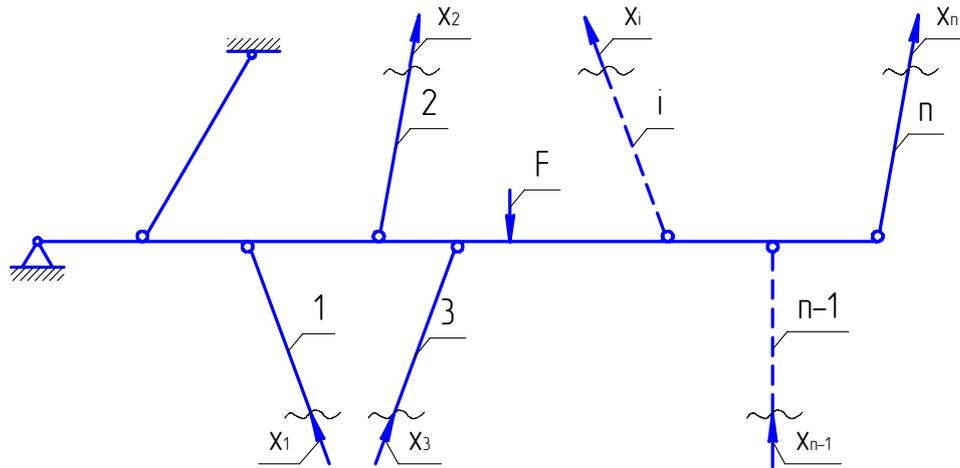


Рис. 4.1, в. Эквивалентная система

3. Запись условия эквивалентности в виде системы канонических уравнений метода сил (СКУМС):

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, F) = 0 \\ \dots \\ \delta_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, F) = 0 \\ \dots \\ \delta_n(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, F) = 0 \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы отображает физическое отсутствие перемещения раскрепленных точек стержней в направлении снятых связей. Применяя принцип суперпозиции, левые части уравнений можно представить как:

$$\begin{cases} \delta_1(x_1) + \delta_1(x_2) + \dots + \delta_1(x_i) + \dots + \delta_1(x_n) + \delta_1(F) = 0 \\ \dots \\ \delta_i(x_1) + \delta_i(x_2) + \dots + \delta_i(x_i) + \dots + \delta_i(x_n) + \delta_i(F) = 0 \\ \dots \\ \delta_n(x_1) + \delta_n(x_2) + \dots + \delta_n(x_i) + \dots + \delta_n(x_n) + \delta_n(F) = 0 \end{cases}$$

Чтобы выделить неизвестные  $x$  проведем следующие рассуждения на примере  $\delta_i(x_n)$  – перемещения  $i$  – точки под действием силы  $x_n$ . На основании закона Гука можно сделать заключение, что величина  $\delta_i(x_n)$  будет во столько раз отличаться от перемещения  $\delta_i(x_n=1)$  под действием единичной силы, находящейся на месте силы  $x_n$ , во сколько раз сила  $x_n$  отличается от единицы, т.е. в  $x_n$  раз.

Таким образом:  $\delta_i(x_n) = \delta_i(x_n=1) \cdot x_n$ . Для простоты обозначим  $\delta_i(x_n=1)$  как  $\delta_{in}$ . То есть первый индекс будет обозначать номер (положение) раскрепленной точки или убранной связи ( $i$ ), а второй – положение единичной силы, совпадающее с положением другой убранной связи ( $n$ ). С учетом такого обозначения систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \dots + \delta_{1i} \cdot x_i + \dots + \delta_{1n} \cdot x_n + \delta_{1F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{i1} \cdot x_1 + \delta_{i2} \cdot x_2 + \dots + \delta_{ii} \cdot x_i + \dots + \delta_{in} \cdot x_n + \delta_{iF} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \dots + \delta_{ni} \cdot x_i + \dots + \delta_{nn} \cdot x_n + \delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты при  $x$  принято называть единичными, а свободные члены –  $\delta_{1F}, \dots, \delta_{iF}, \dots, \delta_{nF}$  – грузовыми. Физическая сущность всех коэффициентов – это перемещение соответствующих точек упругой системы, обозначенных первым индексом от фактора либо единичного, либо грузового, обозначенного вторым индексом.

#### 4. Определение величин коэффициентов СКУМС

Коэффициенты рекомендуется определять с помощью интеграла Мора для случая деформации растяжение-сжатие.

– единичные коэффициенты с отличающимися индексами  $N_{ki}, N_{kn}$ :

$$\delta_{in} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{ki} \cdot N_{kn} dz_k}{(EA)_k}$$

где  $k$  – количество взаимодействующих рабочих элементов (одноименных стержней или участков, работающих на  $x_i=1$  и  $x_n=1$ );

$N_{ki}$  – внутренняя продольная сила, возникающая в  $k$ -том стержне от  $x_i=1$ , приложенной к основной системе;

$N_{kn}$  – внутренняя продольная сила, возникающая в  $k$ -том стержне от  $x_n=1$ , приложенной к основной системе;

$(EA)_k$  – жесткость поперечного сечения  $k$ -того рабочего стержня (участка).

– единичные коэффициенты с одинаковыми индексами:

$$\delta_{ii} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{ki}^2 dz_k}{(EA)_k},$$

где  $i=1,2,\dots,n$

– грузовые коэффициенты:

$$\delta_{iF} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{ki} \cdot N_{kF} dz_k}{(EA)_k}.$$

При вычислении всех перечисленных коэффициентов внутренние продольные силы от единичных сил и данных внешних нагрузок определяют нагружая соответствующими силами основную систему.

5. Решение системы канонических уравнений относительно неизвестных  $X$  любым известным методом из курса математики

6. Деформационная проверка правильности раскрытия статической неопределимости

Физический смысл проверки заключается в определении перемещения связанной точки, т.е. такой точки упругой системы, перемещение которой заранее известно, и равно нулю.

Например:

$$0 = \delta_i = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{ki} \cdot N_{k\Sigma} dz_k}{(EA)_k},$$

где  $N_{ki}$  – внутренняя продольная сила в каждом рабочем элементе от единичной силы, приложенной к  $i$ -той точке основной системы;

$N_{k\Sigma}$  – внутренняя продольная сила в рабочем элементе, возникающая от внешней нагрузки на исходной (или эквивалентной) системе.

Рассмотрим реализацию описанного алгоритма на примере решения следующей задачи.

Задача № 3

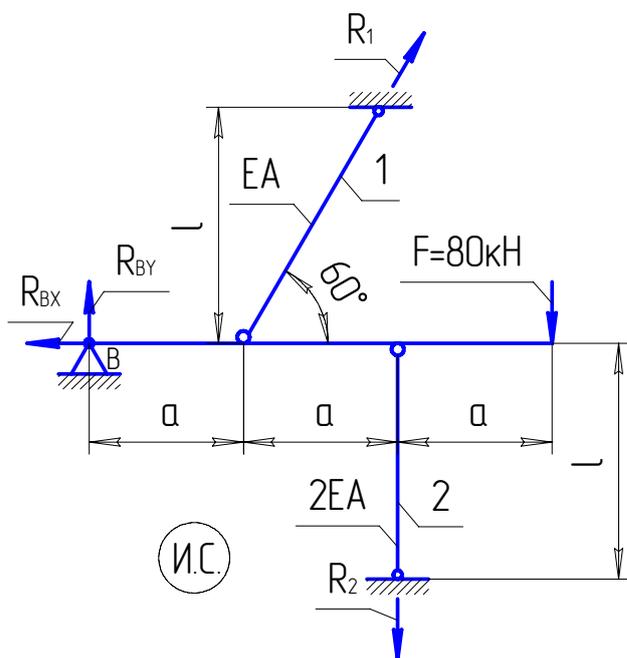


Рис. 4.2, а. Исходная система

Дано:

Горизонтальная балка крепится на плоскости с помощью шарнирно неподвижной опоры и 2-х податливых стержней. Жесткость поперечного сечения балки гораздо превосходит жесткость сечений стержней. Балка нагружена силой  $F=80$  кН (рис. 4.2, а). Требуется определить усилия, возникающие в стержнях.

**Решение:**

Так как связей на конструкции 4, а независимых уравнений статического равновесия для плоской системы сил можно составить 3, то очевидно, что одна связь лишняя, степень статической неопределимости  $S=1$ .

Раскроем статическую неопределимость методом сил

1. Образует основную систему, убрав связь со стержня №1 и силу  $F$ .

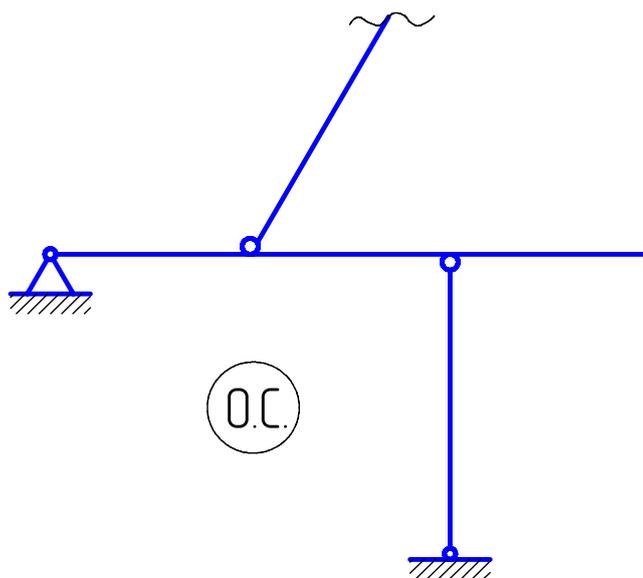


Рис. 4.2, б. Основная система

2. Образует эквивалентную систему, заменив отброшенную связь силой  $X_1$  и перенеся с исходной системы  $F=80$  кН. (рис. 4.2, в).

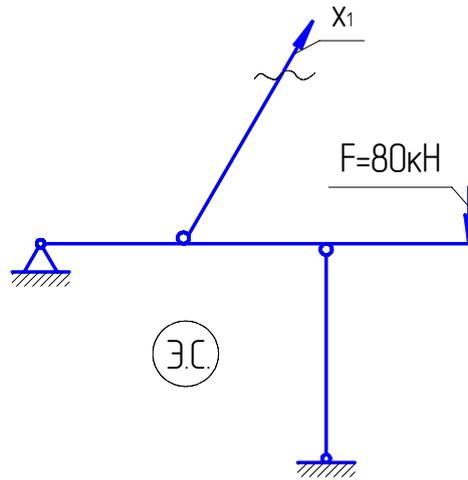


Рис. 4.2, в. Эквивалентная система

3. Так как степень статической неопределенности  $S=1$ , то система канонических уравнений метода сил имеет порядок равный 1, то есть мы имеем одно уравнение.

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{1F} = 0$$

4. Определим величины коэффициентов  $\delta_{11}$  и  $\delta_{1F}$  используя интеграл Мора.

$$\delta_{11} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{k1}^2 dz}{(EA)_k}$$

Чтобы определить продольные силы  $N_{k1}$  нагрузим основную систему силой  $x_1=1$  (рис. 4.2, г).

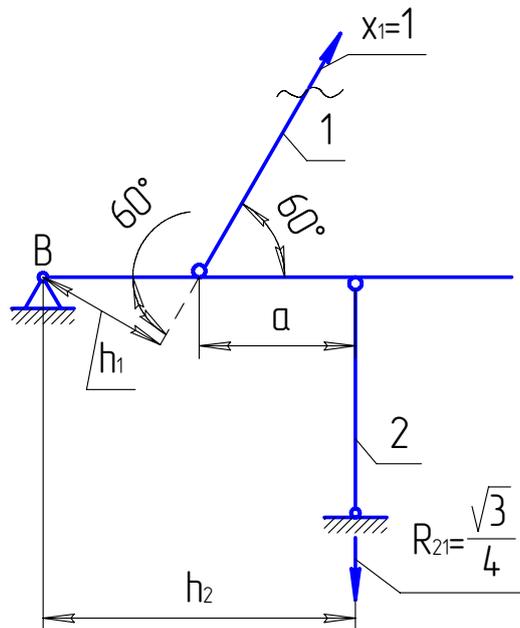


Рис. 4.2, г. Основная система, нагруженная единичной силой

$N_{11}=1$  (основание: метод сечений)

В точке «2» возникнет реакция  $R_{21}$ , которую вычислим, составив уравнение статического равновесия:

$$\sum_i M_0(F_i) = 0 : x_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_2 = 0$$

$$R_{21} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{a \cdot \sin 60^\circ}{2 \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

тогда

$$N_{21} = R_{21} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (основание: метод сечений).}$$

Так как рабочих элементов, испытывающих деформацию растяжения на основной системе два (стержни №1 и №2), то

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{k=1}^2 \int_{l_k} \frac{N_{k1}^2 dz}{(EA)_k} = \int_0^{l_1} \frac{N_{11}^2 dz_1}{(EA)_1} + \int_0^{l_2} \frac{N_{21}^2 dz_2}{(EA)_2} = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot l} \frac{1^2 dz_1}{EA} + \int_0^l \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 dz_2}{2 \cdot EA} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{3} \cdot EA} + \\ &+ \frac{3 \cdot l}{32 \cdot EA} = \frac{1,248 \cdot l}{EA} \end{aligned}$$

Грузовой коэффициент  $\delta_{1F}$ , представляющий собой перемещение раскрепленной точки «1» под действием внешней силы  $F$  с помощью интеграла Мора может быть записан как:

$$\delta_{1F} = \sum_k \frac{N_{k1} \cdot N_{kF} dz_k}{(EA)_k}$$

$N_{k1}$  нам уже известны ( $N_{11}=1$ ;  $N_{21} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ), а для определения  $N_{kF}$  нагрузим основную систему силой  $F$  (рис. 4.2, д).

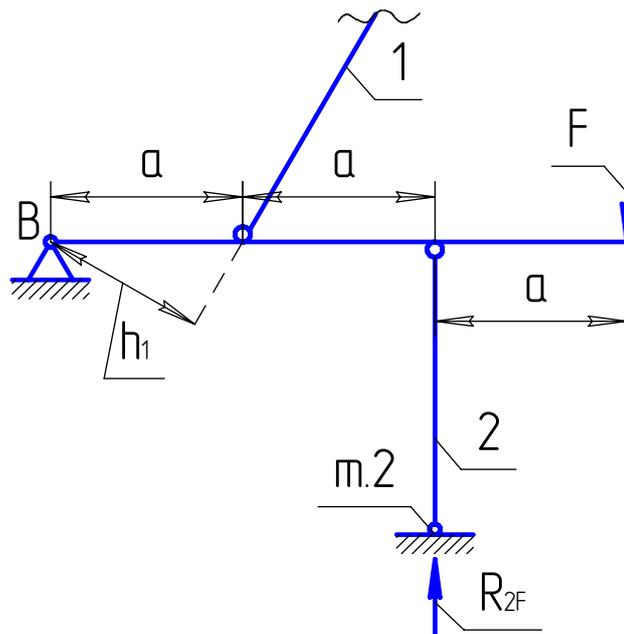


Рис. 4.2, д. Основная система, нагруженная внешней силой

Очевидно, что на силу  $F$  работает только стержень «2». Реакция в точке его крепления  $R_{2F}$  опять может быть получена из уравнения статического равновесия:

$$\sum_i M_0(F_i) = 0: R_{2F} \cdot 2 \cdot a - F \cdot 3 \cdot a = 0: R_{2F} = \frac{3}{2} \cdot F.$$

Тогда продольные силы в стержнях  $N_{1F}=0$  (стержень раскреплен и не работает),

$$N_{2F} = -R_{2F} = -\frac{3}{2} \cdot F \text{ (стержень работает на сжатие).}$$

То есть взаимодействие функций  $N_{k1}$  и  $N_{kF}$  будет происходить только на стержне «2» и

$$\delta_{1F} = \int_0^{l_2} \frac{N_{21} \cdot N_{2F} dz_2}{(EA)_2} = - \int_0^l \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot F dz_2}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot EA} = - \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot F \cdot l}{16 \cdot EA} = - \frac{0,325 \cdot F \cdot l}{EA}.$$

5. Решим уравнение относительно  $x_1$ :

$$x_1 = - \frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{0,325 \cdot F \cdot l \cdot EA}{EA \cdot 1,248 \cdot l} = 0,26 \cdot F$$

6. Чтобы определить правильность раскрытия статической неопределенности проведем деформационную проверку, которая сводится к определению перемещения той точки упругой системы, которое нам заранее известно: Это нулевые перемещения закрепленных точек в направлении имеющих связей.

В данном случае можно определить перемещение точки «1» по направлению силы  $x_1$ . Для решения этой задачи будем использовать эквивалентную систему (рис. 4.2, е).

Определим реакцию в т. «2» через  $\sum M_0(F_i) = 0$ .

$$x_1 \cdot h_1 + R_2 \cdot 2 \cdot a - F \cdot 3 \cdot a = 0;$$

$$R_2 = \frac{3 \cdot F \cdot a - 0,26 \cdot F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2 \cdot a} = 1,387 \cdot F.$$

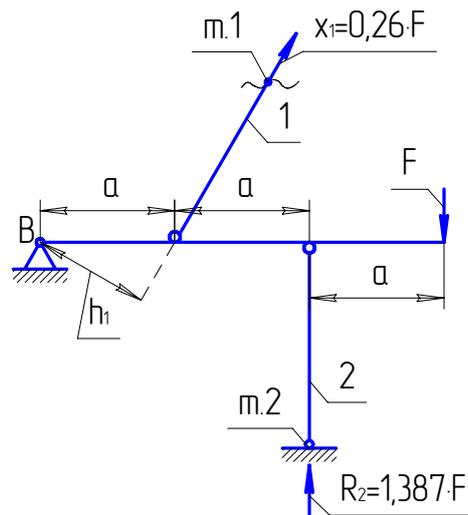


Рис. 4.2, е. Эквивалентная система с определенными реакциями

Продольные силы, возникающие в стержнях:

$$N_{1\Sigma} = x_1 = 0,26 \cdot F = 20,8 \text{ kH};$$

$$N_{2\Sigma} = -R_2 = -1,387 \cdot F = -110,96 \text{ kH}.$$

Для определения перемещения т. «1» применим метод Мора

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{k1} \cdot N_{k\Sigma} dz_k}{(EA)_k} = \int_0^{l_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot l} \frac{0,26 \cdot F \cdot 1 dz_1}{EA} + \int_0^{l_2 = l} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-1,387 \cdot F) dz_2}{2 \cdot EA} = \\ &= \frac{0,26 \cdot F \cdot 2 \cdot l}{\sqrt{3} \cdot EA} - \frac{\sqrt{3} \cdot 1,387 \cdot F}{8 \cdot EA} = \frac{0,3 \cdot F \cdot l}{EA} - \frac{0,3 \cdot F \cdot l}{EA} = 0. \end{aligned}$$

То есть статическая неопределенность раскрыта верно.



$$\begin{cases}
 \delta_{11} \cdot x_1^t + \delta_{12} \cdot x_2^t + \dots + \delta_{1i} \cdot x_i^t + \dots + \delta_{1n} \cdot x_n^t + \delta_{1t} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{i1} \cdot x_1^t + \delta_{i2} \cdot x_2^t + \dots + \delta_{ii} \cdot x_i^t + \dots + \delta_{in} \cdot x_n^t + \delta_{it} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{n1} \cdot x_1^t + \delta_{n2} \cdot x_2^t + \dots + \delta_{ni} \cdot x_i^t + \dots + \delta_{nn} \cdot x_n^t + \delta_{nt} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{11} \cdot x_1^\delta + \delta_{12} \cdot x_2^\delta + \dots + \delta_{1i} \cdot x_i^\delta + \dots + \delta_{1n} \cdot x_n^\delta + \delta_{1\delta} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{i1} \cdot x_1^\delta + \delta_{i2} \cdot x_2^\delta + \dots + \delta_{ii} \cdot x_i^\delta + \dots + \delta_{in} \cdot x_n^\delta + \delta_{i\delta} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{n1} \cdot x_1^\delta + \delta_{n2} \cdot x_2^\delta + \dots + \delta_{ni} \cdot x_i^\delta + \dots + \delta_{nn} \cdot x_n^\delta + \delta_{n\delta} = 0
 \end{cases}$$

Рассмотрим описанный выше прием на примере следующей задачи.

#### Задача № 4

Дана балка ВС, закрепленная с помощью шарнирно-неподвижной опоры «О» и 2-х стержней, нагружена двумя силами  $2F$  и  $F=20$  кН (рис. 4.3, а). В процессе эксплуатации оба стержня нагреваются на  $40^\circ\text{C}$ . Стержень №2 изготовлен короче необходимого размера на  $\delta_1=0,08\% \cdot l$ . Площадь сечения стержня  $A=2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент линейного расширения материала стержней  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ ,  $[\sigma]=160$  МПа.

Определить напряжения, возникающие в стержнях от каждого из действующих факторов, а также суммарные напряжения. Сделать вывод о работоспособности системы в целом.

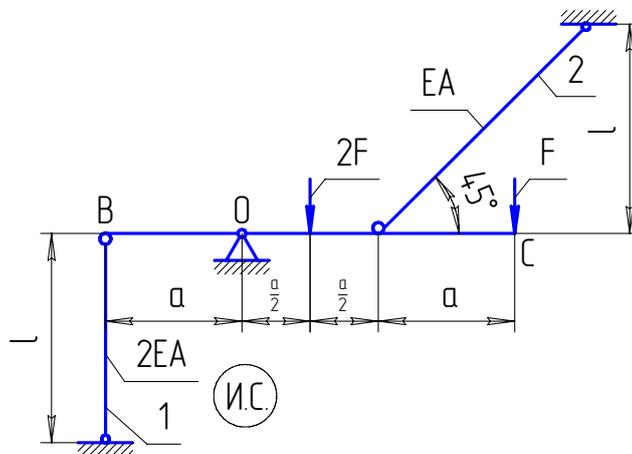


Рис. 4.3, а. Исходная система

#### Решение:

1. Образует основную систему (рис. 4.3, б):

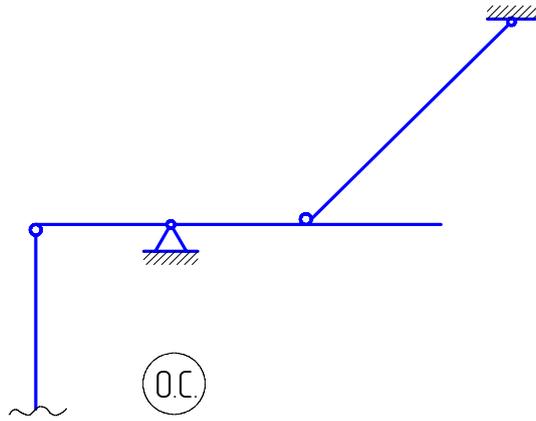


Рис. 4.3, б. Основная система

2. Образум эквивалентные системы (рис. 4.3, в, рис. 4.3 г, рис. 4.3 д):

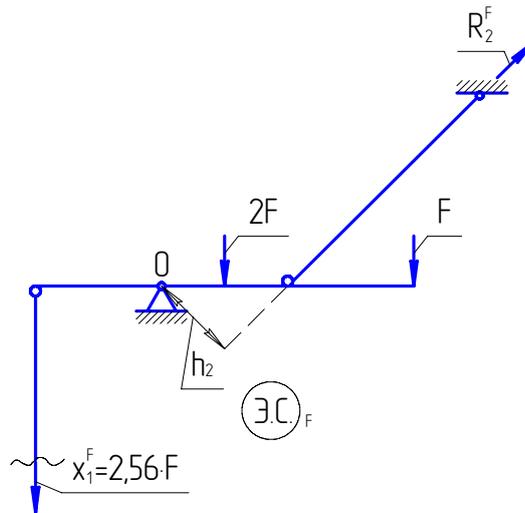


Рис. 4.3, в. Эквивалентная система с воздействием силового фактора

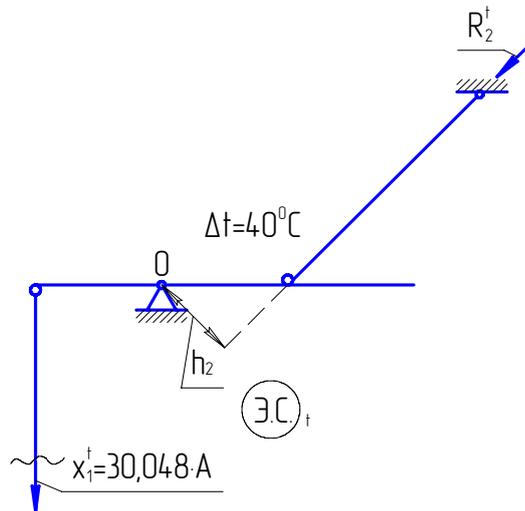


Рис. 4.3, г. Эквивалентная система с воздействием температуры

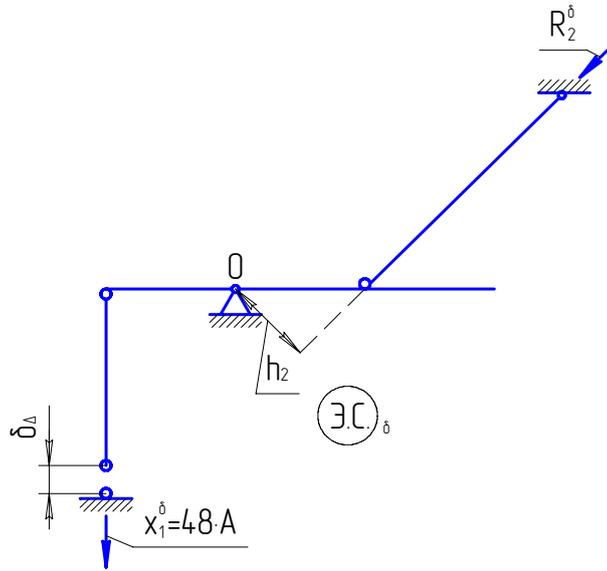


Рис. 4.3, д. Эквивалентная система с неточностью изготовления

3. Для каждой эквивалентной системы запишем условие эквивалентности:

$$\delta_{11} \cdot x_1^F + \delta_{1F} = 0 \text{ — для (эквивалентной системы – F).} \quad (4.1)$$

$$\delta_{11} \cdot x_1^t + \delta_{1t} = 0 \text{ — для (эквивалентной системы – t).} \quad (4.2)$$

$$\delta_{11} \cdot x_1^\delta = \delta_1 \text{ — для (эквивалентной системы – $\delta$).} \quad (4.3)$$

Очевидно, что для всех 3-х эквивалентных систем коэффициент  $\delta_{11}$  одинаков, так как все они построены на одной и той же основной системе.

4. Для определения коэффициентов  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{1F}$  поочередно нагрузим основную систему  $x_1=1$  (рис. 4.3, е) и системой внешних сил (рис. 4.3, ж) и получим величины продольных сил в стержнях.

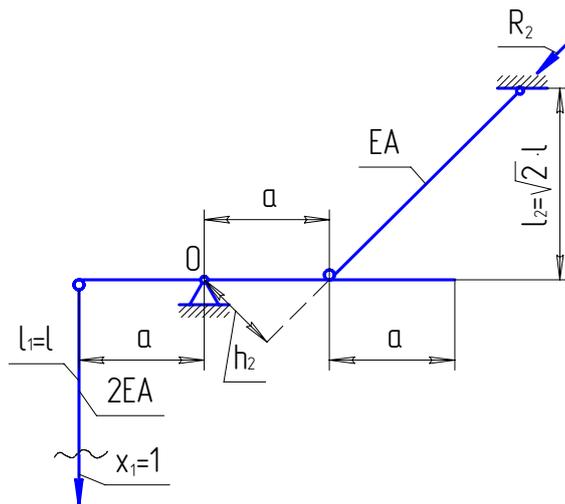


Рис. 4.3, е. Основная система, нагруженная  $x_1=1$

$$\sum_i M_0(F_i) = 0$$

$$x_1 \cdot a - R_2 \cdot h_2 = 0$$

$$h_2 = a \cdot \sin 45^\circ;$$

$$R_2 = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}.$$

$N_{11} = 1$ ;  $N_{21} = -\sqrt{2}$  – основание: метод сечений.

$$\delta_{11} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{k1}^2 dz_k}{(EA)_k} = \int_0^l \frac{N_{11}^2 dz_1}{2 \cdot EA} + \int_0^{\sqrt{2} \cdot l} \frac{N_{21}^2 dz_2}{EA} = \frac{l}{2 \cdot EA} + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot l}{EA} = \frac{3,328 \cdot l}{EA}.$$

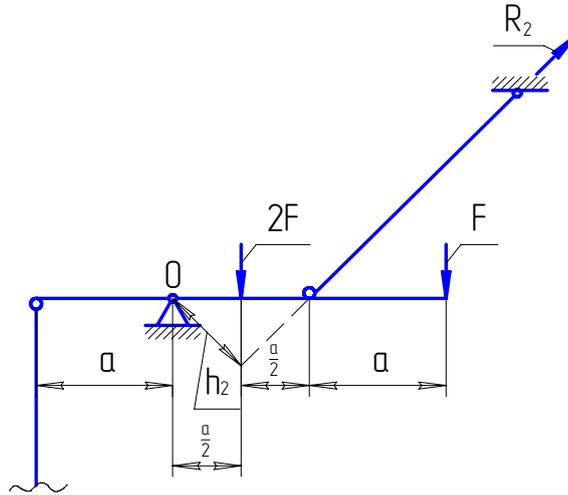


Рис. 4.3, ж. Основная система, нагруженная внешними силами

В данном случае работает только стержень №2, в точке его крепления возникнет реакция  $R_2$ , которую определим из  $\sum_i M_0(F_i) = 0$ :

$$-2 \cdot F \cdot 0,5 \cdot a - F \cdot 2 \cdot a + R_2 \cdot h_2 = 0$$

$$R_2 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot F;$$

$$N_{1F} = 0; N_{2F} = R_2 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot F;$$

$$\delta_{1F} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{k1} \cdot N_{kF} dz_k}{(EA)_k} = \int_0^{l_2} \frac{N_{21} \cdot N_{2F} dz_2}{EA} = \frac{-\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot F \cdot \sqrt{2} \cdot l}{EA} = -\frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot l \cdot F}{EA}.$$

$$\begin{aligned} \delta_{1t} &= \sum_k \int_{l_k} \alpha_k \cdot \Delta t_k \cdot N_{k1} dz_k = \alpha \cdot \Delta t \left( \int_0^{l_1} N_{11} dz_1 + \int_0^{l_2} N_{21} dz_2 \right) = \\ &= 1,25 \cdot 40^\circ \cdot (l - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l) = -50 \cdot 10^{-5} \cdot l. \end{aligned}$$

Решим каждое уравнение (4.1, 4.2, 4.3) относительно неизвестных  $x_1^F$ ,  $x_1^t$ ,  $x_1^\delta$ .

$$x_1^F = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot l \cdot F \cdot EA}{EA \cdot 3,328 \cdot l} = 2,56 \cdot F;$$

$$x_1^t = -\frac{\delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{50 \cdot l \cdot EA}{3,328 \cdot l} = 15,024 \cdot 10^{-5} \cdot EA = 30,048 \cdot A;$$

$$x_1^\delta = \frac{\delta_1}{\delta_{11}} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \cdot l \cdot EA}{3,328 \cdot l} = 2,4 \cdot 10^{-4} \cdot EA = 48 \cdot A.$$

Каждое значение  $x_1$  поставим на соответствующую эквивалентную систему (рис. 4.3, б, рис. 4.3 в, рис. 4.3 г) и определим для каждой эквивалентной системы реакцию в точке крепления второго стержня, используя  $\sum_i M_0(F_i) = 0$ :

$$\begin{aligned} x_1^F \cdot a - 2 \cdot F \cdot 0,5 \cdot a - F \cdot 2 \cdot a + R_2^F \cdot h_2 &= 0 & R_2^F &= 0,622 \cdot F \\ x_1^t \cdot a - R_2^t \cdot h_2 &= 0 & R_2^t &= \sqrt{2} \cdot x_1^t = 42,49 \cdot A \\ x_1^\delta \cdot a - R_2^\delta \cdot h_2 &= 0 & R_2^\delta &= \sqrt{2} \cdot x_1^\delta = 67,88 \cdot A \end{aligned}$$

Определим напряжения в стержнях от каждого из факторов.

*Продольные силы и напряжения в стержнях от силы  $F=20$  кН.*

Так как  $N_1(F)=2,56 F$ , а  $N_2(F)=R_2^F=0,622 F$ , то

$$\begin{aligned} \sigma_1(F) &= \frac{N_1(F)}{A_1} = \frac{2,56 \cdot F}{2 \cdot A} = \frac{2,56 \cdot 20 \text{ кН}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \cdot 10^{-3} = 128 \text{ МПа}; \\ \sigma_2(F) &= \frac{N_2(F)}{A_2} = \frac{0,622 \cdot 20 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \cdot 10^{-3} = 62,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

*Продольные силы и температурные напряжения в стержнях при их равномерном нагреве на  $40^\circ\text{C}$ .*

$$\begin{aligned} N_1(\Delta t) &= x_1^t = 30,048 \cdot A; \\ N_2(\Delta t) &= -R_2^t = -42,49 \cdot A; \\ \sigma_1(\Delta t) &= \frac{N_1(\Delta t)}{A_1} = \frac{30,048 \cdot A}{2 \cdot A} = 15,024 \text{ МПа (стержень растянут);} \\ \sigma_2(\Delta t) &= \frac{N_2(\Delta t)}{A_2} = -\frac{42,49 \cdot A}{A} = -42,49 \text{ МПа (стержень сжат).} \end{aligned}$$

*Продольные силы и сборочные напряжения в стержнях в результате неточности изготовления 1-го стержня короче на  $0,08\% \cdot l$ .*

$$\begin{aligned} N_1(\delta_1) &= x_1^\delta = 48 \cdot A; \\ N_2(\delta_1) &= -R_2^\delta = -67,88 \cdot A; \\ \sigma_1(\delta_1) &= \frac{N_1(\delta_1)}{A_1} = \frac{48 \cdot A}{2 \cdot A} = 24 \text{ МПа (стержень растянут);} \\ \sigma_2(\delta_1) &= \frac{N_2(\delta_1)}{A_2} = \frac{-67,88 \cdot A}{A} = -67,88 \text{ МПа (стержень сжат).} \end{aligned}$$

*Суммарные продольные усилия и напряжения в стержнях от совокупности действия факторов.*

$$\begin{aligned} N_{1\Sigma} &= N_1(F) + N_1(\Delta t) + N_1(\delta_1) = 2,56 \cdot F + 30,048 \cdot A + 48 \cdot A = 51,2 \text{ кН} + \\ &\quad + 6 \text{ кН} + 9,6 \text{ кН} = 66,8 \text{ кН}; \\ N_{2\Sigma} &= N_2(F) + N_2(\Delta t) + N_2(\delta_1) = 0,622 \cdot F - 42,49 \cdot A - 67,88 \cdot A = 12,44 \text{ кН} + \\ &\quad - 8,498 \text{ кН} - 13,576 \text{ кН} = -9,634 \text{ кН}; \\ \sigma_{1\Sigma} &= \sigma_1(F) + \sigma_1(\Delta t) + \sigma_1(\delta_1) = 128 \text{ МПа} + 15,024 \text{ МПа} + 24 \text{ МПа} = \end{aligned}$$

$$= 167,024 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2\Sigma} = \sigma_2(F) + \sigma_2(\Delta t) + \sigma_2(\delta_1) = 62,2 \text{ МПа} - 42,49 \text{ МПа} - 67,88 \text{ МПа} =$$

$$= -48,17 \text{ МПа};$$

Из результатов расчета видно, что в стержне №1 развиваются напряжения растяжения, превышающие допускаемую величину. Перегруз составляет 7,024 МПа, что в процентном соотношении от  $[\sigma]$  составляет:  $\frac{7,024}{160} \cdot 100\% = 4,39\% < 5\%$ , то есть меньше допускаемого

процента перегруза. Во втором стержне развивается напряжение сжатия за счет температурного воздействия и неточности изготовления, которые значительно меньше допускаемого. То есть в целом конструкция работоспособна при заданных условиях нагружения.

Рассмотрим еще одну задачу на примере часто встречающейся расчетной схемы.

### Задача №5

Ступенчатый стержень с жестко закрепленными концами нагружается силами  $F_1=50 \text{ кН}$  и  $F_2=30 \text{ кН}$  (рис. 4.4, а). В процессе эксплуатации подвергается равномерному нагреву на  $\Delta t=20^\circ\text{C}$ . Определить величину максимального напряжения возникающего в стержне, учитывая, что стержень изготовлен короче от необходимой длины на величину 0,01%.

Материал стержня Ст 3;  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ ;  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ ;  $A=2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

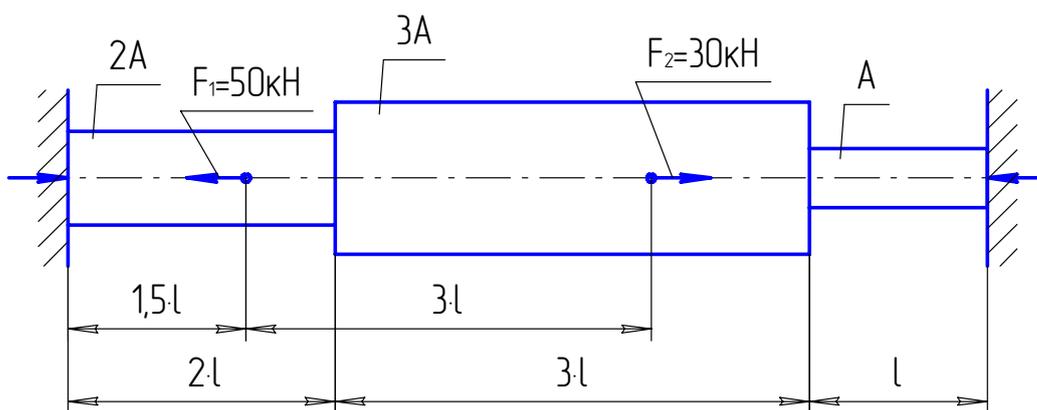


Рис. 4.4, а. Исходная система

### Решение:

Так как для данной системы сил можно составить одно уравнение статического равновесия

$\left( \sum_i F_{ix} = 0 \right)$ , а неизвестных реактивных сил – две, то степень статической неопределимости

$S=1$ . То есть прежде решения задачи об определении внутренних сил предстоит раскрыть статическую неопределимость, для чего применим метод сил. Образует основную систему (рис. 4.4, б).

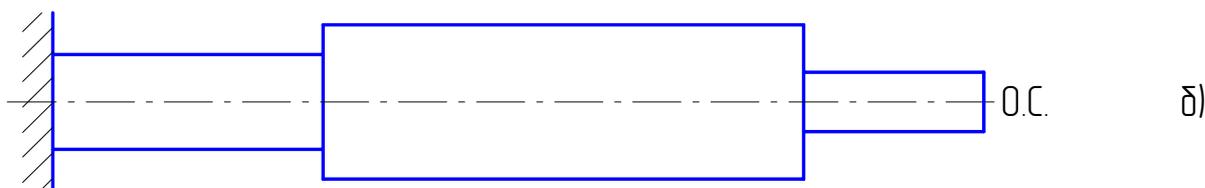


Рис. 4.4, б. Основная система

Образует эквивалентные системы (рис. 4.4, в, г, д).

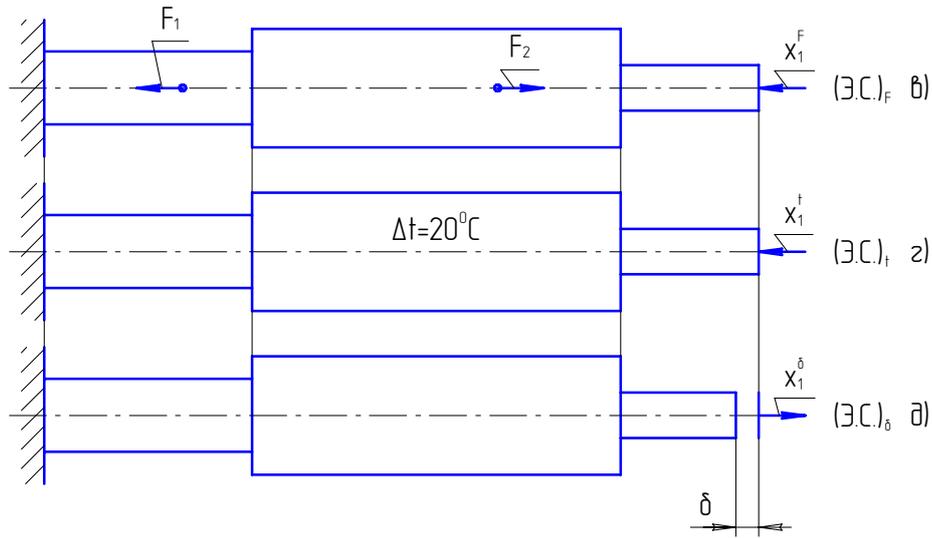


Рис. 4.4, в, г, д. Эквивалентные системы

Для каждой эквивалентной системы запишем условие эквивалентности:

$$\delta_{11} \cdot x_1^F + \delta_{1F} = 0 \text{ - для (эквивалентной системы с F).} \quad (4.4)$$

$$\delta_{11} \cdot x_1^t + \delta_{1t} = 0 \text{ - для (эквивалентной системы с } \Delta t \text{).} \quad (4.5)$$

$$\delta_{11} \cdot x_1^\delta = \delta \text{ - для (эквивалентной системы с } \delta \text{).} \quad (4.6)$$

Для определения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{1F}$  нагрузим основную систему сначала только  $x_1=1$ , а затем только внешними силами. Для каждого случая построим эпюры продольных сил (рис. 4.4, е).

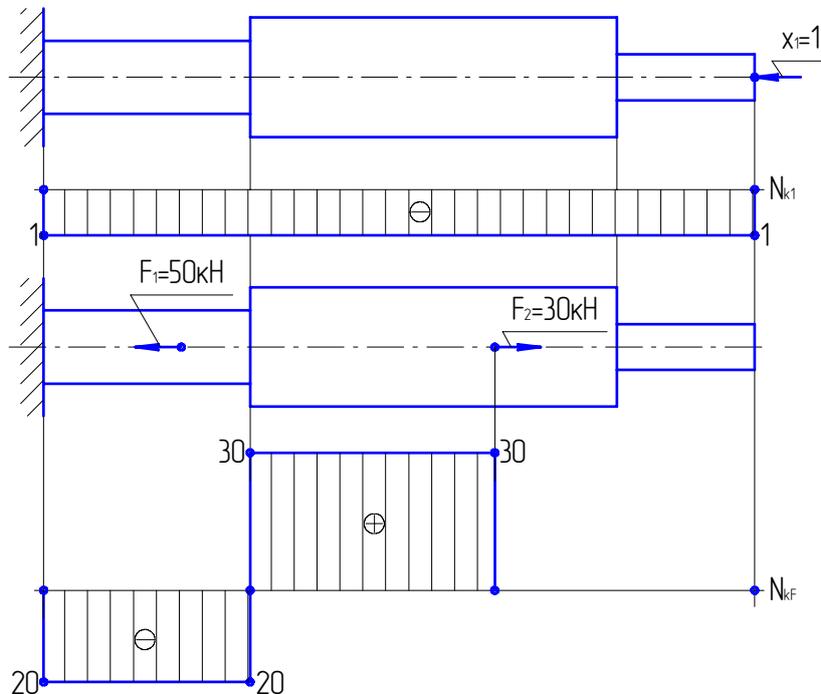


Рис. 4.4, е. Эпюры продольных сил ( $N_{k1}$  и  $N_{kF}$ )

Определим составляющие величины реакции в правой заделке:

$$x_1^F, x_1^t, x_1^\delta, \text{ решая соответственно уравнения (4.4, 4.5, 4.6)}$$

$$x_1^F = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{17,5 \cdot l \cdot EA}{EA \cdot 3 \cdot l} = 5,83 \text{ кН};$$

$$x_1^l = -\frac{\delta_{1l}}{\delta_{11}} = \frac{150 \cdot 10^{-5} \cdot l \cdot EA}{3 \cdot l} = 50 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot A = 100 \cdot A;$$

$$x_1^\delta = \frac{\delta}{\delta_{11}} = \frac{0,01\% \cdot 6 \cdot l \cdot EA}{3 \cdot l} = 10^{-4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot A = 40 \cdot A.$$

Сделаем деформационную проверку для  $x_1^F$ . Для этого, используя (Э.С.)<sub>F</sub>, определим горизонтальное перемещение точки «С» предварительно построив эпюру продольной силы  $N_{k\Sigma}$  (рис. 4.4, ж).

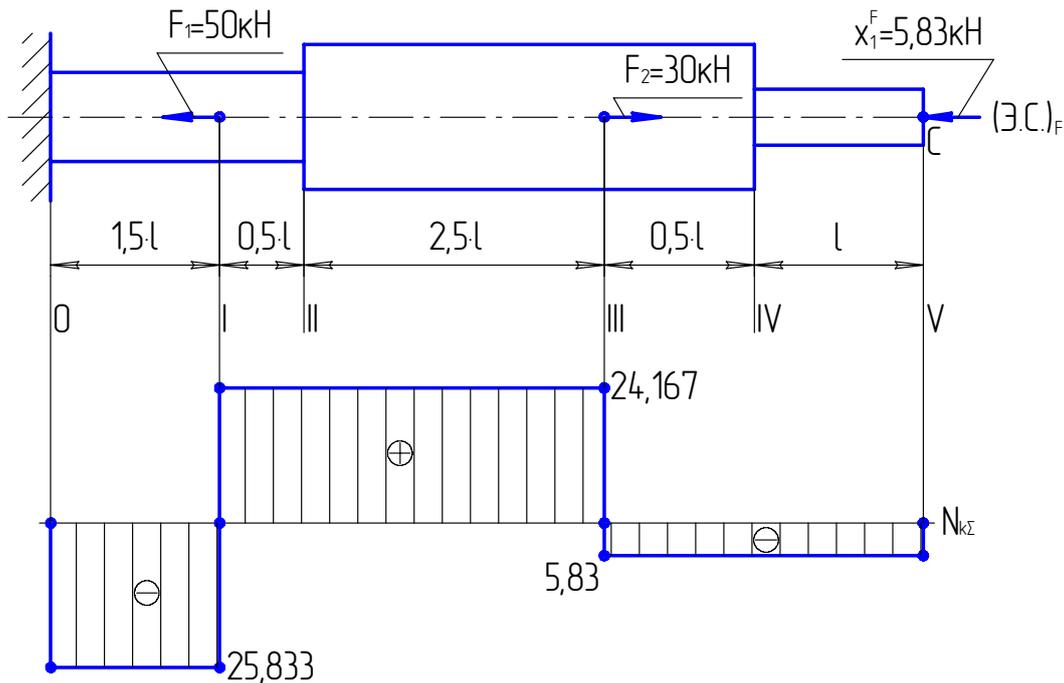


Рис. 4.4, ж. Эпюра продольной силы  $N_{k\Sigma}$

$$\delta_C^{zоп.} = \sum_k \int_{l_k} \frac{N_{k1} \cdot N_{k\Sigma} dz_k}{(EA)_k} = \int_0^{1,5 \cdot l} \frac{-25,83 \cdot (-1) dz_1}{2 \cdot EA} + \int_0^{0,5 \cdot l} \frac{24,17 \cdot (-1) dz_2}{2 \cdot EA} +$$

$$+ \int_0^{2,5 \cdot l} \frac{24,17 \cdot (-1) dz_3}{3 \cdot EA} + \int_0^{0,5 \cdot l} \frac{-5,83 \cdot (-1) dz_4}{3 \cdot EA} + \int_0^l \frac{-5,83 \cdot (-1) dz_5}{EA} =$$

$$= \frac{19,37 \cdot l}{EA} - \frac{6,0425 \cdot l}{EA} - \frac{20,14 \cdot l}{EA} + \frac{0,97 \cdot l}{EA} + \frac{5,83 \cdot l}{EA} = \frac{26,17 \cdot l}{EA} - \frac{26,18 \cdot l}{EA} = -\frac{0,01 \cdot l}{EA}$$

$$\%погрешности = \frac{0,01}{26,17} \cdot 100\% = 0,038\% \ll 3\%,$$

т.е. можно говорить о правильности определенной реакции  $x_1^F$ .

Определим напряжения по участкам бруса от F,  $\Delta t$  и  $\delta$ .

Напряжения от внешней нагрузки:

$$\sigma_{0-I}(F) = \frac{N_{0-I}(F)}{2 \cdot A} = \frac{-25,833 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -64,58 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{I-II}(F) = \frac{N_{I-II}(F)}{2 \cdot A} = \frac{24,17 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 60,425 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II-III}(F) = \frac{N_{II-III}(F)}{3 \cdot A} = \frac{24,17 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 40,28 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III-IV}(F) = \frac{N_{III-IV}(F)}{3 \cdot A} = \frac{-5,83 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -9,72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV-V}(F) = \frac{N_{III-IV}(F)}{A} = \frac{-5,83 \text{ кН} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -29,15 \text{ МПа}.$$

Напряжения от температуры:

Так как внутренняя продольная сила  $N_{\Sigma}(\Delta t)$  по длине всего бруса постоянной величины,  $N_{\Sigma}(\Delta t) = -x_1^t = -100 \cdot A$ , то температурные напряжения будут зависеть только от площади сечения участка:

$$\sigma_{0-I}(\Delta t) = \sigma_{I-II}(\Delta t) = \frac{N_{\Sigma}(\Delta t)}{2 \cdot A} = \frac{-100 \cdot A}{2 \cdot A} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II-III}(\Delta t) = \sigma_{III-IV}(\Delta t) = \frac{N_{\Sigma}(\Delta t)}{3 \cdot A} = \frac{-100 \cdot A}{3 \cdot A} = -33,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV-V}(\Delta t) = \sigma_{V-VI}(\Delta t) = \frac{N_{\Sigma}(\Delta t)}{A} = \frac{-100 \cdot A}{A} = -100 \text{ МПа}.$$

Напряжения, возникающие при сборке:

Так как внутренняя продольная сила  $N_{\Sigma}(\delta)$ , возникающая при сборке, постоянна по длине стержня и определяется величиной  $x_1^{\delta}$ .  $N_{\Sigma}(\delta) = x_1^{\delta} = 40 \cdot A$ . Сборочные напряжения, так же как и температурные, зависят от площади сечения участка:

$$\sigma_{0-I}(\delta) = \sigma_{I-II}(\delta) = \frac{N_{\Sigma}(\delta)}{2 \cdot A} = \frac{40 \cdot A}{2 \cdot A} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II-III}(\delta) = \sigma_{III-IV}(\delta) = \frac{N_{\Sigma}(\delta)}{3 \cdot A} = \frac{40 \cdot A}{3 \cdot A} = 13,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV-V}(\delta) = \sigma_{V-VI}(\delta) = \frac{N_{\Sigma}(\delta)}{A} = \frac{40 \cdot A}{A} = 40 \text{ МПа}.$$

Построим эпюры напряжений от всех трех факторов, а также суммарную (рис. 4.4, з).

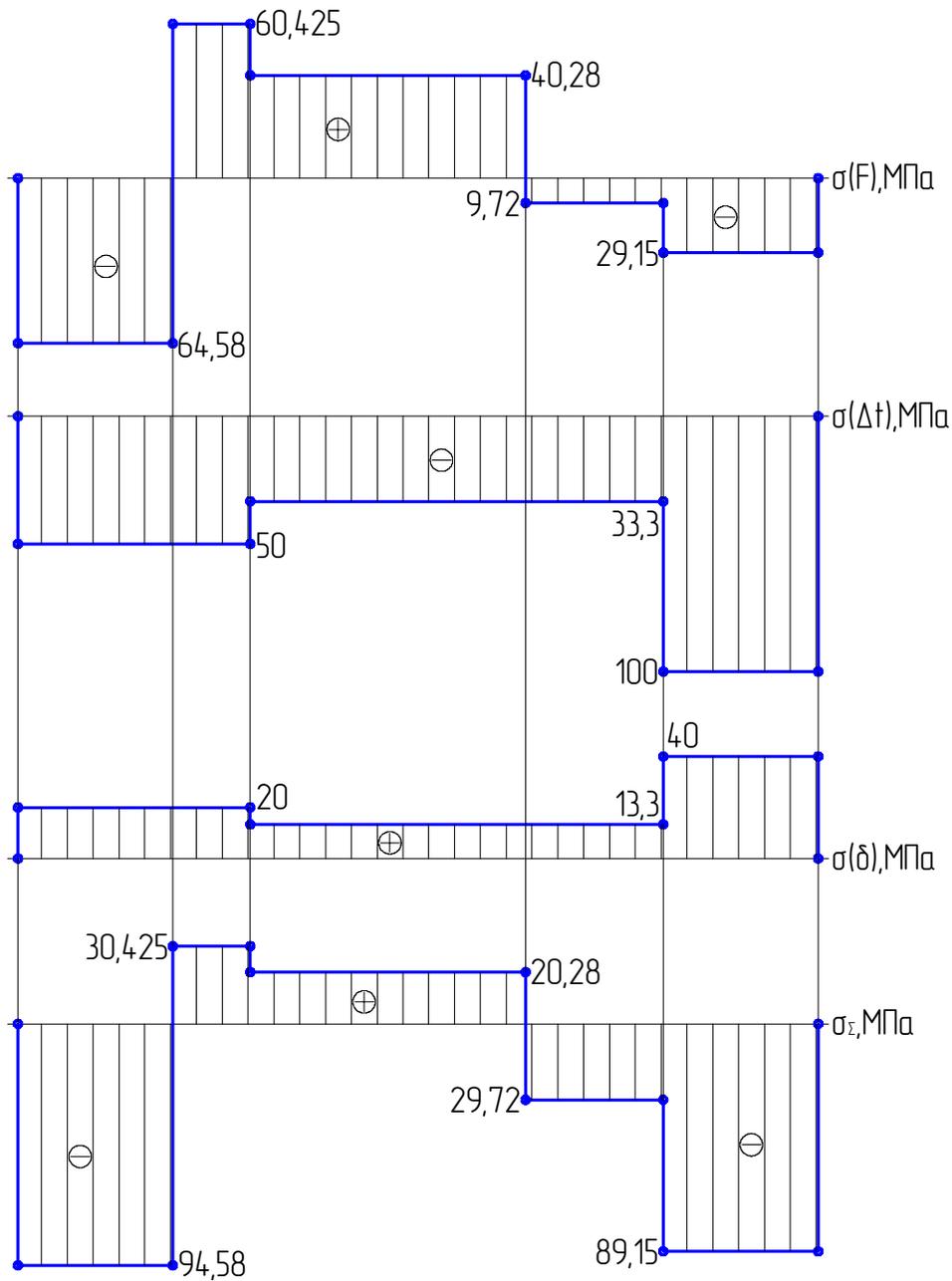


Рис. 4.4, з. Эпюры напряжений

Из анализа эпюры  $\sigma_{\Sigma}$  видно, что опасным является участок ОС с  $\sigma_{\Sigma} = -94,58 \text{ МПа}$ , так как  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

$$|\sigma_{\Sigma}| < [\sigma],$$

то есть при заданных условиях нагружения брус данных геометрических размеров использовать можно.

## Заключение

Итак, мы рассмотрели, для случая деформации растяжение-сжатие, основные понятия, методы решения типовых задач, иллюстрации применения методов на наиболее распространенных расчетных схемах. Для того чтобы оценить степень усвоения данной темы, предлагаем ответить на вопросы для самоконтроля:

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечениях элемента конструкции, испытывающего деформацию растяжение-сжатие?
2. Какая геометрическая характеристика поперечного сечения используется при определении напряжений при растяжении-сжатии?
3. Как определить нормальное напряжение в сечениях элемента конструкции при растяжении-сжатии?
4. Запишите условие прочности по допускаемому напряжению.
5. Чем определяется жесткость поперечного сечения при растяжении-сжатии?
6. Что такое абсолютная линейная деформация?
7. Что такое относительная линейная деформация?
8. Что такое перемещение при растяжении-сжатии?
9. Чем определяется перемещение поперечных сечений стержня при растяжении-сжатии?
10. Как связаны относительная деформация и напряжение при растяжении-сжатии?
11. Что такое допускаемое напряжение?
12. Как определяется допускаемое напряжение для пластичных материалов?
13. Как определяется допускаемое напряжение для хрупких материалов?
14. В чем заключается смысл метода расчета на прочность по допускаемому напряжению?
15. Для чего используется метод Мора?
16. Какие внутренние силовые факторы входят в подинтегральное выражение интеграла Мора при растяжении сжатии?
17. Какие методы раскрытия статической неопределимости вы знаете?
18. Как определяется степень статической неопределимости?
19. Что такое основная система?
20. Что такое эквивалентная система?
21. Чем определяется порядок системы канонических уравнений метода сил (СКУМС)?
22. Каков физический смысл СКУМС?
23. Каков физический смысл единичных коэффициентов СКУМС?
24. Каков физический смысл грузовых коэффициентов СКУМС?
25. Каков физический смысл температурных коэффициентов СКУМС?

## **Библиографический список**

1. Тимошенко С.П., Герс Дж. Механика материалов. СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 672 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 590 с.
3. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1999. – 592 с.

# Приложения

## Расчетно-графическое задание №2 для студентов очной формы обучения

### Расчет на прочность и жесткость в условиях растяжения-сжатия

#### Задача 2.1. Расчет на прочность и жесткость статически-определимой стержневой конструкции

Оценить прочность и жесткость стержня (рис. 2.1). Сделать выводы о работоспособности и рациональности данной конструкции. Спроектировать брус равного сопротивления.

##### План решения задачи:

1. Вычертить в масштабе брус (рис. 2.1) по размерам, соответствующим своему варианту (исходные данные в таблице 2.1);
2. Рассчитать продольную силу и нормальные напряжения на участках бруса и построить их эпюры. Провести проверку прочности;
3. Определить перемещения характерных сечений бруса. Построить эпюру перемещений и провести проверку жесткости;
4. Из условия прочности по допускаемому напряжению спроектировать брус равного сопротивления. Начертить эскиз полученного бруса.

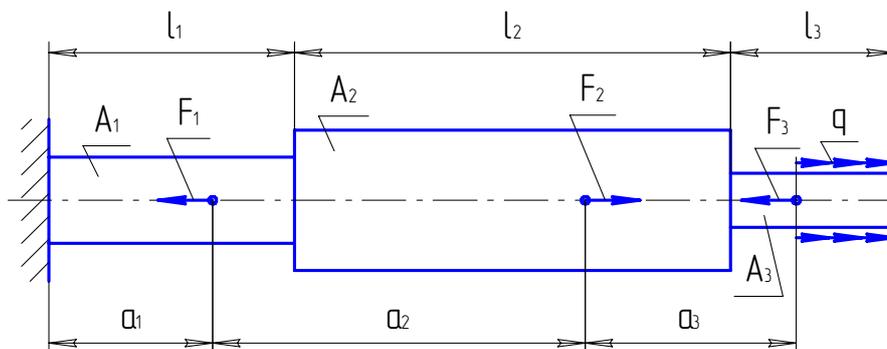


Рис. 2.1

Таблица 2.1

№ п.п.	1 цифра варианта						2 цифра варианта				3 цифра варианта				
	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м	$a_1$ , м	$a_2$ , м	$a_3$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$q$ , кН/м	$A_1$ *10 <sup>4</sup> м <sup>2</sup>	$A_2$ *10 <sup>4</sup> м <sup>2</sup>	$A_3$ *10 <sup>4</sup> м <sup>2</sup>	Марка материала	$\sigma_T$ , МПа
0	0,2	1	0,5	0,15	0,55	0,1	60	30	25	50	8,5	6,5	4	Ст 6	300
1	0,3	0,1	0,6	0,25	0,4	0,15	65	40	35	60	8	6	4,5	Ст 4	240
2	0,4	0,2	0,7	0,1	0,3	0,3	80	40	45	70	7,5	5,5	5	Ст 40	320
3	0,5	0,3	0,8	0,4	0,25	0,45	90	55	50	80	7	5	5,5	Ст 60	370
4	0,6	0,4	0,9	0,45	0,15	0,5	100	35	20	90	6,5	7	6	Ст 5	270
5	0,7	0,5	1	0,4	0,55	0,65	70	20	25	50	6	4	6,5	Ст 3 горячекатанная	220

№ п.п	1 цифра варианта						2 цифра варианта				3 цифра варианта				
	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м	$a_1$ , м	$a_2$ , м	$a_3$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$q$ , кН/ м	$A_1$ *1 $0^4$ , $0^2$ , м <sup>2</sup>	$A_2$ *1 $0^4$ , $0^2$ , м <sup>2</sup>	$A_3$ *1 $0^4$ , $0^2$ , м <sup>2</sup>	Марка материала	$\sigma_T$ , МПа
6	0,8	0,6	0,1	0,5	0,6	0,2	45	25	35	60	5,5	4,5	7	Ст 3 листовая фасонная	230
7	0,9	0,7	0,4	0,6	0,4 5	0,5 5	50	45	40	70	5	8	7,5	АМГ	210
8	1	0,8	0,3	0,3	0,8	0,6	40	50	70	80	4,5	9	8	Д 6	380
9	0,1	0,9	0,2	0,0 5	0,6 5	0,4	80	75	80	90	4	10	8,5	Д 1	250

### Задача 2.2. Исследование грузоподъемности стержневой статически-неопределимой системы

Исследовать влияние лишней связи, температуры и неточности изготовления одного из стержней на грузоподъемность конструкции. Сделать выводы и дать рекомендации по улучшению несущей способности конструкции.

#### План решения задачи:

1. Вычертить схему (рис. 2.2) в масштабе по данным своего варианта, (исходные данные в таблице 2.2);
2. Определить грузоподъемность статически определимой системы, убрав с рис. 2.2 любой стержень №1 или №2;
3. Определить грузоподъемность системы, добавив, ранее убранный стержень. Оценить влияние и эффективность дополнительного рабочего элемента;
4. Определить температурные напряжения в рабочих элементах, при условии одновременного и равномерного воздействия температуры на оба стержня. Оценить влияние температурных напряжений на грузоподъемность системы;
5. Определить монтажные напряжения в рабочих элементах, возникающие при сборке конструкции с учетом неточного изготовления одного из стержней. Оценить совместное влияние монтажных и температурных напряжений на грузоподъемность системы;
6. Дать рекомендации по улучшению работоспособности конструкции (изменение угла крепления рабочих элементов, величины допуска на изготовление и т.д.), подкрепив необходимыми расчетами.

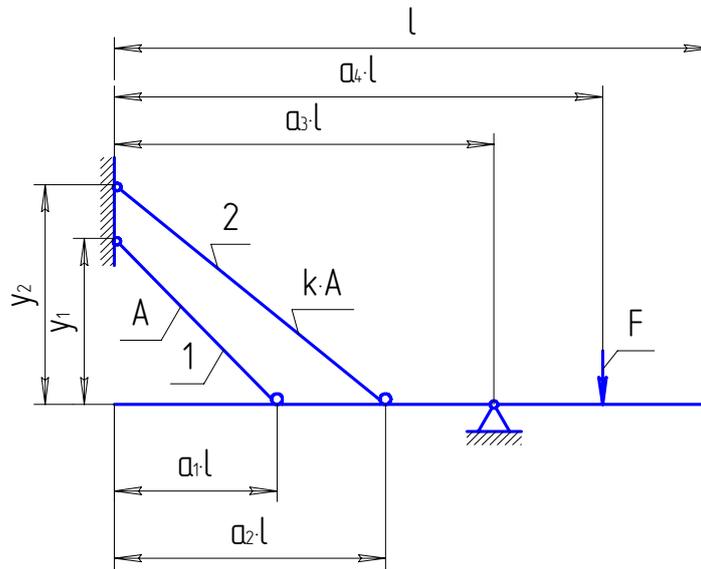


Рис. 2.2

Таблица 2.2

Первая цифра варианта						Вторая цифра варианта					Третья цифра варианта			
№ вар	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$l, м$	№ вар	$k$	$y_1, м$	$y_2, м$	$A \cdot 10^4, м^4$	№ вар	$\sigma_T, МПа$	$\Delta t, ^\circ C$	$\Delta, \%$
0	0,5	0,8	0,2	1,0	4,0	0	1,0	2,0	-2,0	10	0	400	-50	0,009
1	0,3	0,8	0,1	0,6	3,8	1	1,1	-2,0	3,0	9,5	1	380	-45	-0,01
2	0,7	0,9	0,2	0,5	3,6	2	1,2	2,0	3,0	9,0	2	360	-40	0,02
3	0,1	0,7	0,3	0,9	3,4	3	1,3	-3,0	-3,5	8,5	3	340	-35	-0,03
4	0,1	0,9	0,4	0,7	3,2	4	1,4	3,0	-4,0	8,0	4	320	-30	0,04
5	0,3	0,8	0,5	0,1	3,0	5	0,5	-2,5	3,5	7,5	5	300	30	-0,05
6	0,2	0,4	0,6	1,0	2,8	6	0,6	3,0	3,0	7,0	6	280	35	0,06
7	0,1	0,3	0,7	0,5	2,6	7	0,7	-3,0	-4,0	6,5	7	260	40	-0,07
8	0,1	0,5	0,8	0,3	2,4	8	0,8	2,0	-3,5	6,0	8	240	45	0,08
9	0,4	0,7	0,9	0,2	2,2	9	0,9	2,0	2,0	5,5	9	220	50	-0,09

Общие данные:

$A=1,25 \cdot 10^{-5} 1/^\circ C$  – коэффициент линейного расширения;

$n_T=1,5$  – коэффициент запаса по текучести;

$E=2 \cdot 10^5$  МПа – модуль упругости 1-го рода.

## Расчетно-графическое задание №2

для студентов заочной и очно-заочной формы обучения

### Расчет на прочность и жесткость в условиях растяжения-сжатия

#### Задача 2.1. Расчет на прочность и жесткость статически-определимой стержневой конструкции

Для стержня, с жестко заделанным одним концом (рис. 2.1, а-г), работающим под воздействием внешних сил  $F$ , провести проверку прочности и жесткости. Сделать выводы о работоспособности и рациональности конструкции.

##### План решения задачи:

1. Вычертить в масштабе стержень по размерам, соответствующим своему варианту (исходные данные табл. 2.1);
2. Рассчитать продольную силу и нормальные напряжения на участках стержня и построить их эпюры. Провести проверку прочности;
3. Определить перемещения характерных сечений стержня. Построить эпюру перемещений и провести проверку жесткости;
4. Сделать выводы о работоспособности и рациональности конструкции.

#### Задача 2.2. Расчет на прочность и жесткость статически-определимой стержневой конструкции

Добавить к свободному концу стержня из задачи 2.1 жесткую заделку. Провести проверку прочности стержня с двумя заделанными концами с учетом действия системы внешних сил, температуры и неточности изготовления.

##### План решения задачи:

1. Вычертить стержень из задачи 2.1, добавив к его свободному концу жесткую заделку;
2. Раскрыть статическую неопределимость от внешних сил, температуры и неточности изготовления;
3. Построить эпюры продольных сил, возникающих от внешних сил, от температуры и от сборки с учетом неточности изготовления;
4. Определить напряжения от внешних сил, от температуры и от сборки с учетом неточности изготовления и построить их эпюры;
5. Построить эпюру суммарного напряжения с учетом всех факторов. Сделать выводы о прочности.

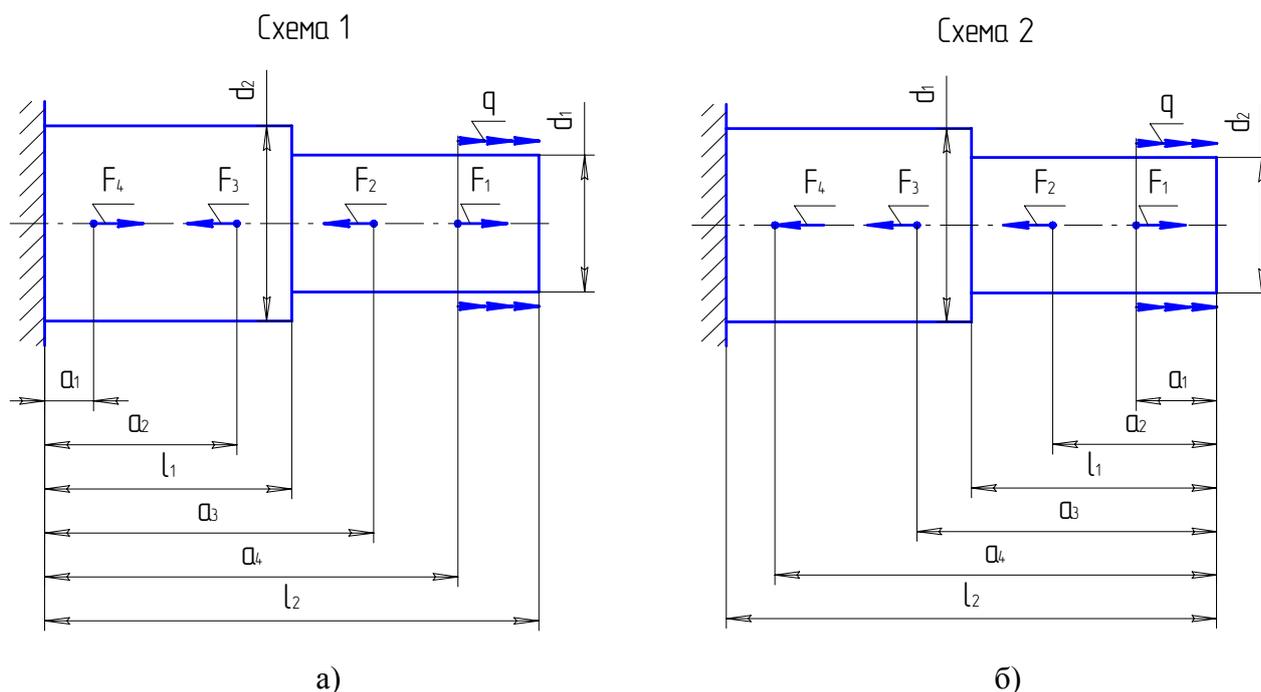
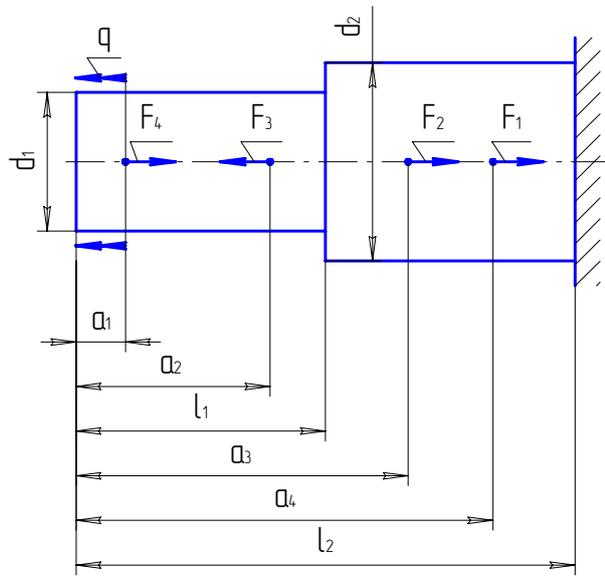
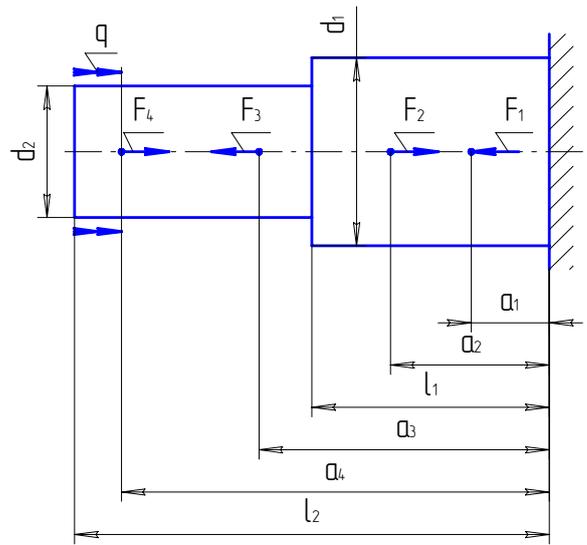


Схема 3



в)

Схема 4



г)

Рис. 2.1

Таблица 2.1

1-я цифра варианта				2-я цифра варианта							3-я цифра варианта							
№ вар.	Варианты схем	Варианты линейных размеров		№ вар.	Варианты линейных размеров						№ вар.	Варианты нагрузок					Дополнительные факторы	
	№ схемы	d <sub>1</sub> , м	d <sub>2</sub> , м		a <sub>1</sub> , м	a <sub>2</sub> , м	a <sub>3</sub> , м	a <sub>4</sub> , м	l <sub>1</sub> , м	l <sub>2</sub> , м		F <sub>1</sub> , кН	F <sub>2</sub> , кН	F <sub>3</sub> , кН	F <sub>4</sub> , кН	q, кН/м	δ, %	Δt, °C
0	схема 1	0,02	0,04	0	0,3	0,4	0,1	0,9	0,55	1,1	0	-10	120	-45	75	-55	0,01	-20
1	схема 2	0,03	0,06	1	0,1	0,9	0,5	0,8	0,45	1,3	1	15	-115	-50	70	50	-0,015	25
2	схема 3	0,04	0,08	2	0,8	1,0	0,5	0,3	0,6	1,2	2	-20	110	55	-65	-45	0,02	30
3	схема 4	0,03	0,015	3	0,9	0,1	0,5	0,8	0,55	1,0	3	25	-105	60	-60	40	-0,025	-35
4	схема 1	0,05	0,025	4	0,5	1,0	0,7	0,4	0,6	1,4	4	-30	100	-65	55	-35	0,03	40
5	схема 2	0,07	0,035	5	0,2	0,7	1,0	0,4	0,65	1,3	5	35	-95	-70	50	30	-0,01	20
6	схема 3	0,01	0,02	6	0,5	0,8	0,9	0,7	0,55	1,2	6	-40	90	75	-45	-25	0,015	-25
7	схема 4	0,09	0,045	7	0,7	0,9	0,6	0,3	0,45	1,1	7	45	-85	80	-40	20	-0,02	30
8	схема 1	0,04	0,02	8	0,4	0,2	1,0	0,6	0,5	1,2	8	-50	80	-85	35	-15	0,025	35
9	схема 2	0,03	0,06	9	0,9	0,7	0,1	0,5	0,6	1,3	9	55	-75	-90	30	10	-0,03	-40