

Решение иррациональных неравенств

Иррациональными неравенствами называются неравенства, содержащие переменную под знаком радикала (корня) или под знаком возведения в дробную степень. При этом, степень корня может быть произвольной.

Например, $\sqrt{x-1} \geq x$; $x^4 \sqrt{x^2 + 4x + 4} < 0$; $(x-2)^{\frac{3}{4}} > 1$.

Из определения следует, что если в записи неравенства нет знака корня (или дробного показателя степени), то это неравенство не является иррациональным. Причём, если под знаком корня нет переменной, то неравенство не является иррациональным.

Например, $x^2 + 2x - 6 \geq \sqrt{5}$; $\frac{x+1}{\sqrt{2}} < -2x^2 + 4$. В этих неравенствах под знаком корня стоят числа, а не переменные, значит, они не являются иррациональными.

Способ решения таких неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам путём возведения обеих частей неравенства в степень.

При этом необходимо учитывать, что:

- при возведении неравенства в нечётную степень, получается равносильное неравенство;
- при возведении неравенства в чётную степень получается равносильное неравенство только при условии, что обе части неравенства были неотрицательны.

Основные методы решения иррациональных неравенств:

- 1. Метод возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень.*
- 2. Умножение обеих частей неравенства на сопряжённое выражение.*
- 3. Метод введения новой переменной.*
- 4. Метод разложения на множители.*
- 5. Функционально-графический метод.*

ОДЗ (область допустимых значений) неравенства или неравенств – это множество значений переменной, при которых обе части данного неравенства (или неравенств) имеют смысл.

В некоторых случаях это может быть очень полезно. Более того, иногда можно решить пример просто найдя ОДЗ.
Например: $\sqrt{2x-6} > -2$.

Мы помним, что квадратный корень всегда неотрицателен. Поэтому он всегда будет больше -2 . Значит, решением задачи будет ОДЗ:

$$2x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$2x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Ответ: $[3; +\infty)$

Решение первого неравенства

1. $\sqrt{x-5} < 1$ равносильно $\sqrt{x-5} - 1 < 0$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$ и найдем область определения $x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$ - область определения

Шаг 2. Вычислим нули функции $\sqrt{x-5} - 1 = 0$

$$\sqrt{x-5} = 1$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = 1^2$$

$$x - 5 = 1$$

$x = 6$ - нуль

функции

Шаг 3.

5

6

$$f(5.5) = \sqrt{5.5-5} - 1 = \sqrt{0.5} - 1 < 0$$

$$f(7) = \sqrt{7-5} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$x \in [5; 6)$$

Ответ

Решить неравенство $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

Решение

$$\sqrt[3]{x+2} \geq -5 \Leftrightarrow x+2 \geq (-5)^3 \Leftrightarrow x+2 \geq -125 \Leftrightarrow x \geq -127$$

Ответ: $[-127; +\infty)$.

Решить неравенство $\sqrt{x-5} < 4$

Решение

$$\sqrt{x-5} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x-5 < 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x < 21 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 21$$

Ответ: $[5; 21)$.

$$c > 0, \quad \sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < c^{2n} \end{cases}$$

1. Методом возведения обеих частей неравенства решаются подавляющее большинство иррациональных неравенств.

Рассмотрим сначала простейшие иррациональные неравенства.

К таковым относятся неравенства трёх видов:

1) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$. В силу неотрицательности корня, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Тогда данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Например,

$$\sqrt{3x+1} > \sqrt{x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 > x-5, \\ x-5 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -6, \\ x \geq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \geq 5; \end{cases} \Leftrightarrow x$$

$\in [5; +\infty)$

Ответ: $[5; +\infty)$.

$$\sqrt{5x+6} \geq \sqrt{20-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6 \geq 20-2x, \\ 20-2x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 14, \\ 2x \leq 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in [2; 10]$

Ответ: $[2; 10]$.

1) $\sqrt{f(x)} > g(x)$. В неравенствах такого вида возможны два варианта. Если правая часть неотрицательна, то возводим в квадрат обе части. Если правая часть отрицательна, то неравенство верно при любом значении x из ОДЗ. В виде схемы это выглядит так:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Например,

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} > x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2x+3 > (x-1)^2; \\ x-1 < 0, \\ 2x+3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 4x - 2 < 0; \\ x < 1, \\ 2x \geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \in (2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}); \\ x < 1, \\ x \geq -1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 2 + \sqrt{6}); \\ x \in [-1,5; 1); \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,5; 2 + \sqrt{6}). \end{aligned}$$

Ответ: $[-1,5; 2 + \sqrt{6})$.

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x + 4 > x^2; \\ x < 0, \\ x^2 - 2x + 4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2x < 4; \\ x < 0, \\ x \in R; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 2; \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2); \\ x \in (-\infty; 0); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

1) $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Если правая часть неположительная, то неравенство решений не имеет (значение корня не может быть меньше нуля). Если правая часть положительна, то возводим в квадрат обе части и не забываем, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным. В виде схемы:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 \leq f(x) < g^2(x); \\ g(x) < 0 \Rightarrow \text{решений нет.} \end{cases}$$

Например,

$$\begin{aligned} \sqrt{5x-4} < x &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 5x-4 \geq 0, \\ 5x-4 < x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 5x \geq 4, \\ x^2 - 5x + 4 > 0; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \geq 0,8, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in [0,8; 1) \cup (4; +\infty) \end{aligned}$$

Ответ: $[0,8; 1) \cup (4; +\infty)$.

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} > 2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{x-2} > 0, \\ 2x+3 > (2 + \sqrt{x-2})^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} > -2, \\ 4\sqrt{x-2} < x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \begin{cases} x+2 > 0, \\ 16x-32 < (x+1)^2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x > -2, \\ x^2 - 14x + 33 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (11; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 3) \cup (11; +\infty)$$

Ответ: $[2; 3) \cup (11; +\infty)$.

Знаки неравенств во всех видах могут быть как строгими, так и нестрогими.

$$\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$$

Как решить такое неравенство?

Для начала вспомним, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ – монотонна, то есть, чем больше подкоренное выражение, тем больше сам корень. Поэтому из двух корней больше тот, у которого подкоренное выражение больше.

Чтобы неравенство имело смысл, необходимо, чтобы оба подкоренных выражения были неотрицательны:

$$\{A \geq 0 \quad B \geq 0$$

Но поскольку первое выражение больше второго, достаточно
потре

$$\sqrt{A} \geq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B \\ B \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Примеры:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} > \sqrt{x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 6x - 17} \geq \sqrt{x - 2}$$

$$\sqrt{2x^2 - x - 6} \leq \sqrt{3x^2 - 8x}$$

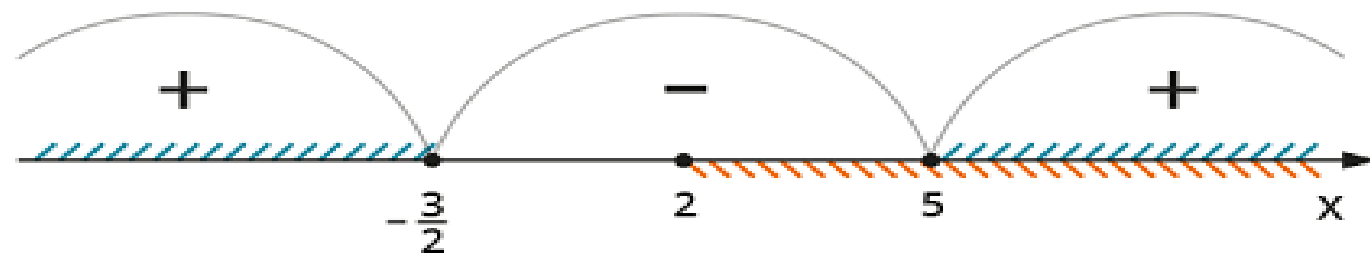
1. Применим только что выученное правило:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} > \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 > x + 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 6x - 17} \geq \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 17 \geq x - 2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

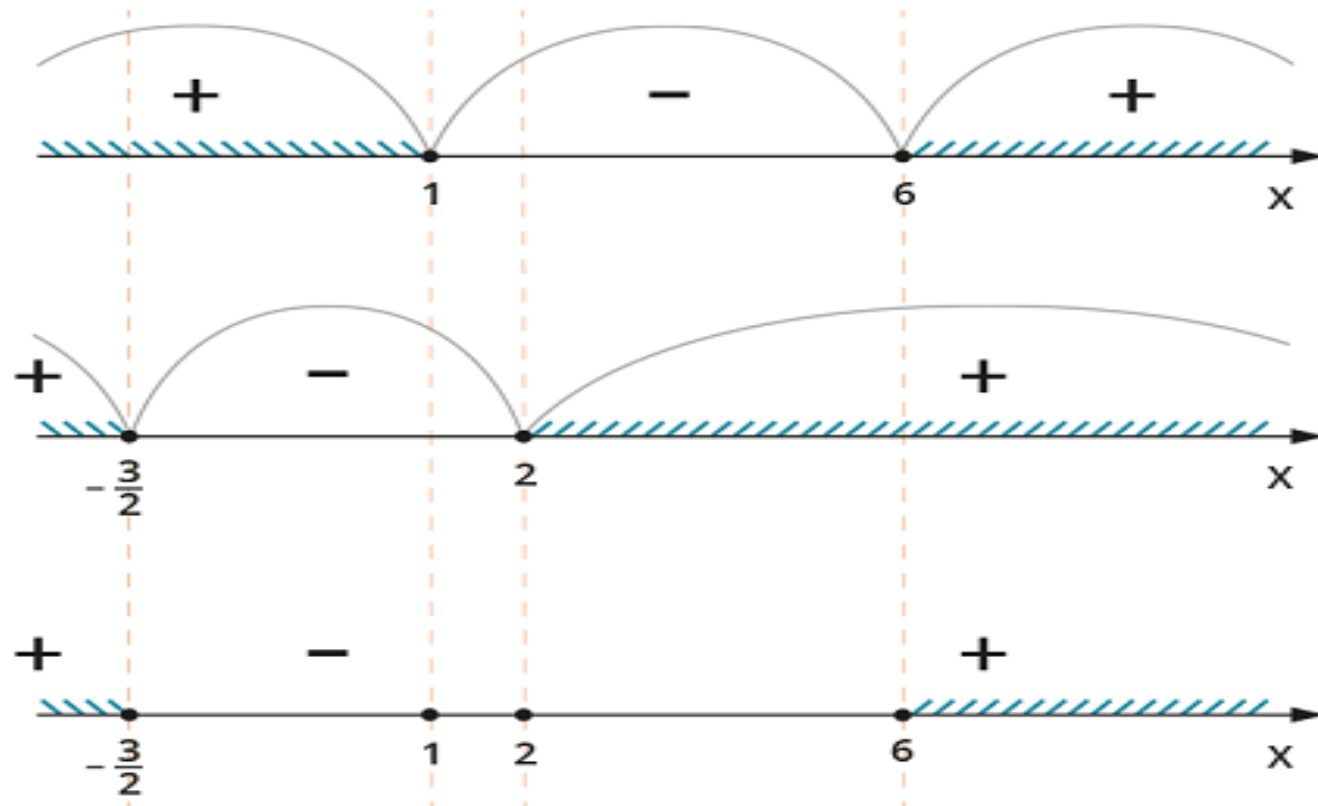
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 5) \left(x + \frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$



$$x \geq 5.$$

$$3. \sqrt{2x^2 - x - 6} \leq \sqrt{3x^2 - 8x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x \geq 2x^2 - x - 6 \\ 2x^2 - x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x - 1) \geq 0 \\ 2(x - 2)\left(x + \frac{3}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [6; +\infty).$$

«Простейшие иррациональные неравенства»:

	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	решений нет	$x \geq 0, x \in [0; +\infty)$
$a = 0$	решений нет	$x > 0, x \in (0; +\infty)$
$a > 0$	$x < a^2, x \in [0; a^2)$	$x > a^2, x \in (a^2; +\infty)$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	равносильно системам $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ ИЛИ $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$	равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - x$

Решение

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq (2 - x)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq 0, \\ x > 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 - x < 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Решить иррациональное неравенство $\sqrt{2x+9} \leq 3x-19$

$$\begin{cases} 2x+9 \geq 0 \\ 3x-19 \geq 0 \\ 2x+9 \leq (3x-19)^2 = 9x^2 - 114x + 361 \end{cases} \begin{cases} x \geq -4,5 \\ x \geq \frac{19}{3} \\ 9x^2 - 116x + 352 \geq 0 \end{cases}$$

$$D = 784; \quad \sqrt{D} = 28; \quad x_1 = \frac{116-28}{18} = \frac{88}{18} = \frac{44}{9}; \quad x_2 = \frac{116+28}{18} = \frac{144}{18} = 8$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{19}{3} \\ 9 \cdot \left(x - \frac{44}{9}\right) \cdot (x-8) \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{19}{3} \\ \begin{cases} x \leq \frac{44}{9} \\ x \geq 8 \end{cases} \end{cases} \quad x \geq 8$$

$$x \in [8; \infty)$$

Иррациональные неравенства.

Пример. Решить неравенства:

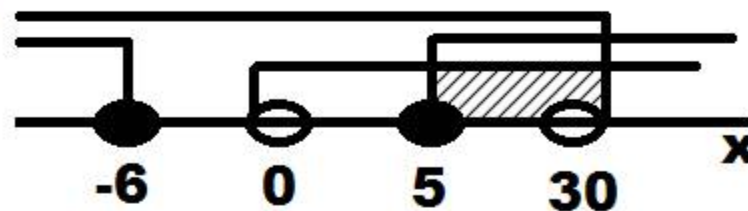
а) $\sqrt{x^2 + x - 30} < x$ б) $\sqrt{x^2 + x - 30} > x$

Решение. а) Применим знания полученные выше

$$\sqrt{x^2 + x - 30} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 30 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 30 < x^2 \end{cases}$$

Решим систему
$$\begin{cases} (x - 5)(x + 6) \geq 0 \\ x > 0 \\ x < 30 \end{cases}$$

Воспользуемся методом интервалов



Решения всех трех неравенств системы пересекаются на отрезке $[5; 30)$ – который и есть решение исходного неравенства.

Карточка №5.

Иррациональные неравенства.

Правила.

Иррациональные неравенства – это неравенства, содержащие неизвестное под знаком корня.

1. Неравенство вида:

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

2. Неравенство вида:

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Образец.

Пример 1: Решить неравенства:

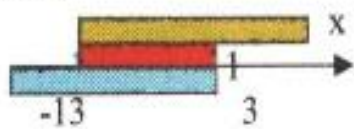
$$\sqrt{3-x} < -4 \quad \text{— левая часть всегда}$$

положительна, а это значит, что решений нет.

Ответ: не имеет решений.

Пример 2: $\sqrt{3-x} < 4$

$$\begin{cases} 3-x < 16 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -13 \\ x \leq 3 \end{cases}$$



Ответ: $-13 < x \leq 3$.

Пример 3: $\sqrt{3-x} > -4$ — левая часть всегда

больше правой, т.к. $x \leq 3$, то неравенство

верно при всех значениях из ОДЗ.

Ответ: $x \leq 3$.

Пример 4: $\sqrt{x+3} < x+1$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 < (x+1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Ответ: $x > 1$.

Пример 4: $\sqrt{x+3} > x+1$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 > (x+1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ (x+2)(x-1) < 0 \end{cases}$$



$-1 \leq x < 1$

Задания.

I. Решить неравенства:

1. $\sqrt{3x-2} < -2$

2. $\sqrt{x-2} < 5$

3. $\sqrt{x-3} < 2$

4. $\sqrt{3-2x} \leq 7$

5. $\sqrt{4-5x} \leq 8$

6. $\sqrt{x+2} \geq 3$

7. $\sqrt{x-7} \geq 2$

8. $\sqrt{7-3x} > 5$

9. $\sqrt{6-6x} > 6$

10. $\sqrt{2x+1} > -3$

11. $\sqrt{6-5x} > -0,5$

12. $\sqrt{x+8} < x+1$

13. $\sqrt{x-3} < x-5$

14. $\sqrt{x-2} \leq x-2$

15. $\sqrt{x+4} \leq x+4$

16. $\sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}$

17. $\sqrt{3+x} \geq \sqrt{x+1}$